А. КИСЕЛЕВ

ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

★

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИЗА И НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СТАТЬИ АЛГЕБРЫ

ИЗДАНИЕ СЕДЬМОЕ

Допущено Научно-педагогической секцией
Государственного ученого совета

55 — 64 тысяча



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1928 — ЛЕНИНГРАД

ОТПЕЧАТАНО

в 1-й Образцовой типографии

Гиза. Москва, Пятницкая, 71.

Главл. А-17649. У. 21. Гиз 28612.

Заказ № 2704. Тираж 10 000 экз.

ОТДЕЛ ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ.

УЧЕНИЕ О ПРЕДЕЛАХ.

Глава первая.

Основные свойства пределов.

307. Определения. Возьмем сумму членов бесконечной убывающей Г. П.:

$$1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + \dots \text{ (знам. } {}^1/_2).$$

Сумма эта при неограниченном увеличении числа членов увеличивается, приближаясь (ч. I, § 252) к постоянному числу 2 так, что разность

$$2 - (1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + \dots)$$

при достаточном увеличении числа слагаемых *делается* меньше любого данного положительного числа (напр., меньше 0,000001) и при дальнейшем увеличении числа слагаемых *остается* всегда меньше этого числа.

При этих условиях мы говорим, что 2 есть *предел* суммы $1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 \dots$, если число слагаемых в ней увеличивается неограниченно.

В этом примере переменное число (сумма членов прогрессии), приближаясь к своему пределу, остается меньше его. Но могут быть случаи, когда переменное число, приближаясь к своему пределу, остается больше его. Напр., если предположим, что в сумме

$$1 + \frac{1}{x}$$

буква x означает переменное положительное число, неограниченно увеличивающееся, то сумма эта будет приближаться к пределу 1, оставаясь всегда больше 1.

Может даже случиться, что переменное число так изменяется, что оно делается то больше, то меньше своего предела. Такой случай мы уже видели, когда говорили о пределе суммы членов бесконечно убывающей Г. П. (ч. I, § 253):

$$2, -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{8}, \ldots \text{ (знам. } -\frac{1}{2}\text{)}.$$

Предел этот равен $1\frac{1}{3}$, и суммы двух, трех, четырех и т. д. членов прогрессии переходят через значения:

$$2-1=1<1\frac{1}{3};\ 2-1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}>1\frac{1}{3};\ 2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=$$
$$=1\frac{1}{4}<1\frac{1}{3}\ldots,$$

которые попеременно то больше, то меньше своего предела.

После этих примеров будет понятно следующее определение предела: *если переменное число x при своем изменении приближается к постоянному числу a таким образом, что абсолютная величина разности $a-x$ делается и при дальнейшем процессе изменения x всегда остается меньше любого данного положительного числа (как бы мало оно ни было), то это постоянное число a называется пределом переменного x.*

Вместо того чтобы говорить: „число x имеет предел a", часто говорят короче: „x стремится к a" и письменно выражают это так:

$$x \to a.$$

Если абсолютная величина переменного числа увеличивается неограниченно (беспредельно), то условно говорят, что оно стремится к $+\infty$ или к $-\infty$ (смотря по его знаку), если же абсолютная величина переменного числа делается и остается меньшей любого данного положительного числа, то говорят, что оно стремится к нулю.

Переменное число, стремящееся к ∞, называется часто бесконечно большим, а переменное число, стремящееся к нулю, называется бесконечно малым. Должно однако помнить, что эти названия не означают „число очень большое", или „число очень малое"; они характеризуют не самое число, а процесс его изменения: число, называемое „бесконечно большим", изменяется так, что оно делается и остается (по абсолютной величине) больше любого данного числа, а число, называемое „бесконечно малым", изменяется так, что оно делается и остается (по абсолютной величине) меньше любого данного положительного числа.

Если воспользоваться в этом смысле названием „бесконечно малое число", то определение предела можно высказать короче так:

Постоянное число a называется пределом переменного числа x, если разность $x-a$ есть бесконечно малое число.

Встречается еще название „конечное число". Так называется всякое число, которое не стремится к $\pm\infty$. Постоянное число тоже может быть названо конечным.

308. Некоторые свойства бесконечно малых чисел. 1) *Алгебраическая сумма бесконечно малых чисел бесконечно мала* (если число слагаемых не увеличивается беспредельно).

Возьмем, напр., три бесконечно малых числа α, β и γ (они могут быть положительные и отрицательные). Чтобы показать, что сумма их $\alpha+\beta+\gamma$ бесконечно мала, надо убедиться, что абсолютная величина этой суммы делается и остается меньше всякого данного положительного числа, напр., меньше 1 миллионной. Действительно, так как числа α, β и γ бесконечно малы, то это значит, что при своем изменении абсолютная величина каждого из них делается и остается меньше любого данного числа, в том числе и меньше $^1/_3$ миллионной; значит, тогда абсолютная величина суммы $\alpha+\beta+\gamma$ делается и остается меньше $^1/_3+{}^1/_3+{}^1/_3$, т. е. меньше 1 миллионной.

Заметим, что если одновременно с уменьшением слагаемых число их будет возрастать, то сумма их может оказаться и не бесконечно малой. Возьмем, напр., такие суммы:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{10} \text{ (10 слагаемых);}$$

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{100} \text{ (100 слагаемых);}$$

. . . .

Вообще $$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n} \text{ (n слагаемых).}$$

Несмотря на то, что с увеличением знаменателя слагаемые уменьшаются неограниченно, сумма их остается неизменной (она равна 1).

Возьмем еще такие суммы:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{10} \text{ (10^2 слагаемых);}$$

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{100} \text{ (100^2 слагаемых);}$$

. . . .

Вообще $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}$ (n^2 слагаемых).

Суммы эти вырастают неограниченно: первая равна $\frac{1}{10}\cdot 100=10$, вторая $\frac{1}{100}\cdot 1000=100$, последняя $\frac{1}{n}\cdot n^2=n$.

2) *Произведение бесконечно малого числа на постоянное число бесконечно мало.*

Напр., произведение 100α, в котором α какое-нибудь бесконечно малое число, делается и остается (по абсолютной величине) меньшим любого данного положительного числа, напр., меньшим 1 миллионной, так как α делается и остается меньшим всякого данного положительного числа, в том числе меньшим и 1/100 миллионной.

3) *Произведение бесконечно малого числа на другое бесконечно малое число бесконечно мало.*

Если произведение бесконечно малого числа на постоянное число способно сделаться так малым, как угодно, то произведение бесконечно малого числа на другое бесконечно малое число и подавно может сделаться как угодно малым (с уменьшением множителя произведение уменьшается).

4) *Частное от деления бесконечно малого числа на постоянное число бесконечно мало.*

Напр., частное $\alpha : 1/10$ бесконечно мало, так как оно равно произведению $\alpha\cdot 10$, т. е. произведению бесконечно малого числа на постоянное число.

Замечание. Частное от деления бесконечно малого числа на другое бесконечно малое число может иногда равняться постоянному числу, иногда бесконечно малому и иногда бесконечно большому; все зависит от того, по какому закону уменьшается делимое и по какому закону уменьшается делитель. Возьмем, напр., такие три частные:

$$\frac{2\alpha}{\alpha};\quad \frac{\alpha^2}{\alpha};\quad \frac{\alpha}{\alpha^2}.$$

Положим, что α есть бесконечное малое число. Тогда первое частное, всегда равное 2, есть число постоянное; второе частное, равное α, есть число бесконечно малое и третье частное, равное дроби $\frac{1}{\alpha}$, есть число бесконечно большое, так как дробь, у которой числитель постоянное число, а знаменатель неограниченно уменьшается, увеличивается беспредельно (ч. I, § 130).

309. Некоторые свойства пределов. 1) *Переменное число, изменяющееся по определенному закону, не может иметь более одного предела.*

Предположим противное, а именно, что переменное число x, изменяясь по некоторому определенному закону, стремится к двум различным пределам, напр., к 5 и 5,1. Тогда, согласно определению предела, разности $x - 5$ и $x - 5{,}1$ должны быть бесконечно малые числа (положительные или отрицательные). Пусть $x - 5 = \alpha$ и $x - 5{,}1 = \beta$; тогда $x = 5 + \alpha$ и $x = 5{,}1 + \beta$; следовательно, $5 + \alpha = 5{,}1 + \beta$, откуда $\alpha - \beta = 0{,}1$.

Но это равенство невозможно, так как разность $\alpha - \beta$, представляющая собою алгебраическую сумму $\alpha + (-\beta)$ бесконечно малых чисел, бесконечно мала и, следовательно, она не может равняться постоянному числу. Значит, нельзя допустить, чтобы число x имело два различных предела.

2) *Если разность двух переменных чисел (x и y) бесконечно мала (или равна нулю) и одно из них имеет предел, то и другое имеет тот же предел.*

Допустим, напр., что число x имеет предел 2. Тогда можно положить, что $x = 2 + \alpha$, где α бесконечно малое число (положительное или отрицательное). Допустим, кроме того, что разность $x - y$ равна бесконечно малому числу β (или нулю). Тогда:

$$(2 + \alpha) - y = \beta, \text{ откуда } 2 - y = \beta - \alpha.$$

Так как разность $\beta - \alpha$ есть число бесконечно малое, то из последнего равенства видно, что 2 есть предел числа y.

3) (Обратная истина). *Если два переменных числа (x и y) имеют общий предел, то их разность бесконечно мала (или равна 0).*

Положим, напр., что числа x и y оба имеют один предел 10. Тогда $x = 10 + \alpha$ и $y = 10 + \beta$, где α и β бесконечно малые числа. Следовательно,

$$x - y = (10 + \alpha) - (10 + \beta) = \alpha - \beta.$$

Так как разность $\alpha - \beta$ бесконечно мала или равна нулю, то и левая часть равенства, т. е. разность $x - y$, бесконечно мала или равна 0.

4) *Предел алгебраической суммы переменных чисел равен алгебраической сумме пределов этих чисел* (если число слагаемых не бесконечно велико).

Положим, мы имеем сумму трех переменных чисел: $x+y+z$, и пусть $x \longrightarrow 3$, $y \longrightarrow 2$ и $z \longrightarrow -5$. Тогда можно написать равенства:

$$x=3+\alpha; \qquad y=2+\beta; \qquad z=-5+\gamma,$$

где α, β и γ бесконечно малые числа. Следовательно,

$$x+y+z=(3+\alpha)+(2+\beta)+(-5+\gamma)=(3+2-5)+(\alpha+\beta+\gamma).$$

Откуда:

$$(x+y+z)-(3+2-5)=\alpha+\beta+\gamma.$$

Правая часть этого равенства есть сумма бесконечно малых слагаемых, а потому она сама бесконечна мала; а из этого надо заключить, что переменная сумма $x+y+z$ стремится к пределу $3+2-5$, т. е. к алгебраической сумме пределов.

Это рассуждение можно повторить о четырех, пяти и более слагаемых, лишь бы число их не возрастало беспредельно (в противном случае сумма $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$ могла бы и не оказаться бесконечно малым числом).

5) *Предел произведения переменных чисел равен произведению пределов этих чисел.*

Пусть имеем произведение xy двух переменных чисел, из которых первое стремится, положим, к пределу 2, а второе к пределу 3. Тогда:

$$x=2+\alpha \text{ и } y=3+\beta$$

и следовательно,

$$xy=(2+\alpha)(3+\beta)=2\cdot3+3\alpha+2\beta+\alpha\beta;$$

откуда:

$$xy-2\cdot3=3\alpha+2\beta+\alpha\beta.$$

Произведения 3α, 2β и $\alpha\beta$ бесконечно малые числа; поэтому и сумма их бесконечно мала; а это означает, что $xy \longrightarrow 2\cdot3$, т. е.

$$xy \longrightarrow (\text{пред. } x)\cdot(\text{пред. } y).$$

Этот вывод можно обобщить на произведение трех, четырех и более сомножителей. Так, рассматривая произведение xyz, как произведение только двух сомножителей xy и z, мы можем написать:

пред. $(xyz)=$(пред. xy)$\cdot$(пред. z)$=$(пред. x)$\cdot$(пред. y)$\cdot$(пред. z).

6) *Предел частного от деления переменных чисел равен частному от деления пределов этих чисел, если только предел делителя не равен нулю.*

Пусть $x \to 2$ и $y \to 3$; тогда $x = 2 + \alpha$ и $y = 3 + \beta$, где α и β бесконечно малые числа. Следовательно,

$$\frac{x}{y} - \frac{2}{3} = \frac{2+\alpha}{3+\beta} - \frac{2}{3} = \frac{(2+\alpha)3 - (3+\beta)2}{(3+\beta)3} = \frac{3\alpha - 2\beta}{(3+\beta)3}.$$

В дроби, стоящей в правой части этого равенства, числитель бесконечно малое число, так как он есть алгебраическая сумма двух бесконечно малых чисел; знаменатель же, имея пределом число 3^2, не равное нулю, не может стремиться к нулю. Если же числитель дроби бесконечно мал, а знаменатель не бесконечно мал, то такая дробь бесконечна мала.

Значит, из написанного выше равенства мы должны заключить, что

$$\frac{x}{y} \to \frac{2}{3} = \frac{\text{пред. } x}{\text{пред. } y}.$$

7) *Предел степени, в которой основание есть переменное число, а показатель постоянное, равен той же степени предела основания.*

Ограничимся случаем, когда показатель степени есть число целое положительное. В этом случае теорема эта представляет собою простое следствие теоремы о пределе произведения. Так:

пред. (x^3) = пред. (xxx) = (пред. x) (пред. x) (пред. x) = (пред. $x)^3$.

Добавим еще без доказательства, как *допущения*, следующие две истины о пределах:

8) *Если переменное число все возрастает, оставаясь однако меньше какого-нибудь постоянного числа, то оно имеет предел.*

Возьмем, напр., приближенные значения $\sqrt{2}$, взятые с недостатком и вычисленные с точностью сначала до 1, потом до $^1/_{10}$, затем до $^1/_{100}$ и т. д. Мы получим тогда бесконечный ряд чисел:

1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; и т. д.

Числа эти, по мере удаления от начала ряда, все увеличиваются, но остаются всегда меньше некоторого постоянного числа, напр., меньше 1,5; при этих условиях мы должны допустить, что взятый нами ряд, по мере его продолжения, стремится к какому-то определенному пределу (этот предел есть иррациональное число $\sqrt{2}$).

9) *Если переменное число все убывает, оставаясь однако больше какого-нибудь постоянного числа, то оно имеет предел.*

Возьмем для примера ряд приближенных значений $\sqrt{2}$, взятых с избытком, с точностью до 1, до $^1/_{10}$, до $^1/_{100}$ и т. д.:

2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422; и т. д.

По мере удаления от начала ряда числа эти все уменьшаются, но остаются постоянно больше 1,4; при этих условиях мы должны допустить, что ряд стремится к пределу (он равен иррациональному числу $\sqrt{2}$).

Глава вторая.

Применение учения о пределах к вопросам элементарной геометрии.

310. Длина окружности. Предварительно докажем следующие три вспомогательные истины (леммы):

1) *При неограниченном увеличении числа сторон правильного многоугольника, вписанного в данную окружность, длина его стороны стремится к нулю.*

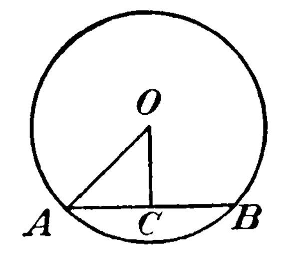
Пусть p есть периметр какого-нибудь правильного многоугольника, вписанного в окружность, и n число его сторон. Тогда длина одной стороны этого многоугольника выразится дробью $\frac{p}{n}$ Положим, что число сторон n неограниченно возрастает при том же радиусе окружности. Тогда в этой дроби знаменатель будет неограниченно возрастать, тогда как числитель не может возрастать беспредельно, так как он постоянно остается меньше периметра любого описанного многоугольника (напр., описанного квадрата [1]). Вследствие этого дробь $\frac{p}{n}$, выражающая длину одной стороны многоугольника, должна стремиться к 0.

2) *Разность между радиусом данной окружности и апофемою правильного многоугольника, вписанного в эту окружность, стремится к нулю, если число сторон многоугольника увеличивается неограниченно.*

Пусть AB есть сторона правильного вписанного многоугольника, OA радиус и OC апофема (черт. 63). Из треугольника OAC выводим: $AO - OC < AC$. При неограниченном увеличении

[1]) В геометрии доказывается, что периметр выпуклого объемлемого многоугольника меньше периметра объемлющего многоугольника.

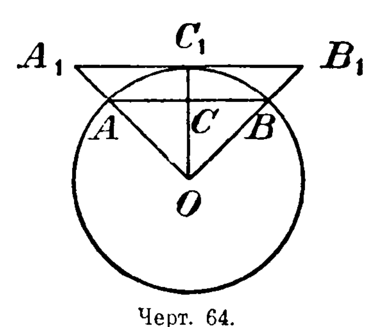
числа сторон вписанного правильного многоугольника длина стороны AB, как мы сейчас видели, стремится к 0; следовательно, отрезок AC, составляющий половину AB, также стремится к 0. Поэтому разность $OA - OC$, будучи меньше AC, и подавно стремится к нулю.



Черт. 63.

3) *Разность между периметрами одноименных правильных многоугольников одного описанного, другого вписанного в данную окружность стремится к нулю, когда число сторон в этих многоугольниках неограниченно увеличивается.*

Пусть AB (черт. 64) будет сторона какого-нибудь правильного вписанного многоугольника, A_1B_1 сторона одноименного правильного описанного многоугольника; OC — апофема и OC_1 — радиус. Так как правильные одноименные многоугольники подобны, то их периметры относятся как радиусы кругов, вписанных или описанных. Поэтому, обозначив периметры многоугольников: вписанного p и описанного P, можем написать пропорцию:



Черт. 64.

$$\frac{P}{p} = \frac{OC_1}{OC}.$$

Из этой пропорции составим производную (ч. I, § 98):

$$\frac{P-p}{p} = \frac{OC_1 - OC}{OC};$$

откуда:

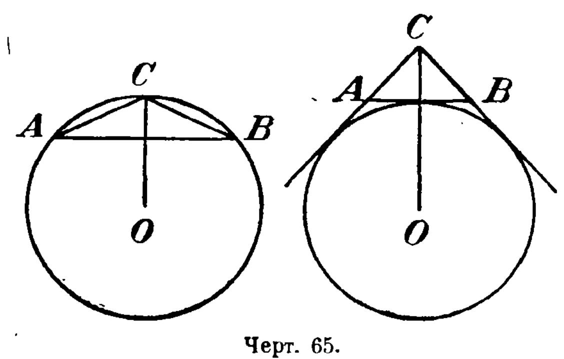
$$P - p = \frac{p(OC_1 - OC)}{OC}.$$

Вообразим теперь, что число сторон многоугольников неограниченно увеличивается. Тогда разность $OC_1 - OC$ будет стремиться к нулю, периметр p постоянно остается меньшим периметра любого описанного многоугольника, а знаменатель OC увеличивается. Из этого следует, что дробь, стоящая в правой части последнего равенства, стремится к нулю; следовательно, и левая часть равенства, т. е. $P - p$, стремится к нулю.

311. Основная теорема. Теперь мы можем установить следующую теорему, на которой основано определение длины окружности.

Периметр правильного многоугольника, вписанного в данную окружность, при неограниченном удвоении числа сторон этого многоугольника стремится к пределу; предел этот не зависит от того, с какого многоугольника мы начали удвоение.

Положим, мы начали удвоение с правильного треугольника, беря 6-угольник, потом 12-угольник, 24-угольник и т. д. без конца. Обозначим через p переменный периметр многоугольника, изменяющегося по этому закону удвоения. Вообразим еще, что строя правильные вписанные многоугольники, мы каждый раз строим и соответственные правильные описанные многоугольники, т. е., напр., построив правильный 6-угольник вписанный, мы строим также правильный 6-угольник описанный, и т. д.



Черт. 65.

Обозначим через P переменный периметр изменяющегося описанного многоугольника. Так как при каждом удвоении числа сторон вписанного многоугольника мы вместо прямой AB (черт. 65, левый) берем ломаную ACB, а при каждом удвоении числа сторон описанного многоугольника мы вместо ломаной ACB (черт. 65, правый) берем прямую AB, то при неограниченном удвоении числа сторон переметр p увеличивается, а периметр P уменьшается, причем первый, увеличиваясь, остается однако меньше периметра любого описанного многоугольника, а второй, уменьшаясь, остается больше периметра любого вписанного многоугольника. Из этого следует, что (согласно допущению 8-у § 309) p имеет предел, также (согласно допущению 9-у того же §) и P имеет предел. Пределы эти должны быть одинаковы (§ 309,2), так как разность $P-p$, по доказанному, стремится к нулю.

Остается доказать, что этот общий предел не зависит от того, с какого многоугольника мы начали удвоение. Пусть P и p будут переменные периметры описанного и вписанного

многоугольников, получаемые удвоением числа сторон какого-нибудь одного начального многоугольника (напр. треугольника), а P_1 и p_1 переменные периметры описанного и вписанного многоугольников, получаемых удвоением числа сторон какого-нибудь другого начального многоугольника (напр. квадрата). Пусть T есть общий предел для P и p и T_1 общий предел для P_1 и p_1. Надо доказать, что $T=T_1$.

Примем во внимание, что при неограниченном удвоении числа сторон обе разности $P-p$ и P_1-p_1, по доказанному, стремятся к нулю; следовательно, и сумма этих разностей стремится к нулю. Эту сумму можно представить так:

$$(P-p)+(P_1-p_1)=(P-p_1)+(P_1-p)\longrightarrow 0.$$

Так как $P>p_1$ и $P_1>p$, то обе разности, стоящие в скобках, положительные числа. Если же сумма положительных чисел стремится к нулю, то каждое слагаемое и подавно, будучи меньше суммы, стремится к нулю. Итак:

$$(P-p_1)\longrightarrow 0; \qquad (P_1-p)\longrightarrow 0.$$

Поэтому (§ 309, 2) пред. $P=$ пред. p_1 и пред. $P_1=$ пред. p, т. е.

$$T=T_1.$$

Теперь мы можем высказать следующее определение: *общий предел, к которому, при неограниченном удвоении числа сторон, стремятся периметры правильных многоугольников как вписанных в окружность, так и описанных около нее, принимается за длину этой окружности.*

312. Отношение длины окружности к ее диаметру. Пусть имеем две окружности с радиусами R и R_1. Впишем в ту и в другую окружность какие-нибудь одноименные многоугольники. Пусть их периметры будут p и p_1. Тогда, вследствие их подобия:

$$p:p_1=R:R_1.$$

Обозначим длины этих окружностей через C и C_1 и положим, что $p=C-a$ и $p_1=C_1-a_1$. Подставив эти разности в пропорцию, получим:

$$(C-a):(C_1-a_1)=R:R_1.$$

Пусть все величины, входящие в эту пропорцию, выражены числами. Тогда пропорция становится числовою, и мы можем из нее вывести:

$$(C-a)R_1=(C_1-a_1)R, \text{ т. е. } CR_1-aR_1=C_1R-a_1R_1,$$

откуда:

$$CR_1-C_1R=aR_1-a_1R.$$

Вообразим теперь, что число сторон вписанных многоугольников неограниченно удваивается. Тогда переменные периметры p и p_1 будут стремиться к своим пределам C и C_1, и потому числа a и a_1 будут стремиться к нулю; равенство же, выведенное нами сейчас, сохраняется при всяких значениях чисел a и a_1. Левая часть этого равенства есть разность постоянных чисел; такая разность равна или нулю, или какому-нибудь другому постоянному числу. Значит, и правая часть равенства должна быть равна или нулю, или другому постоянному числу. Но разность переменных чисел, из которых каждое стремится к нулю, не может равняться никакому постоянному числу, отличному от нуля; значит, необходимо, чтобы эта разность равнялась нулю. Тогда и

$$CR_1-C_1R=0, \text{ откуда: } C:C_1=R:R_1. \qquad \text{(ч. I, § 94.)}$$

Умножив оба члена второго отношения на 2, мы не изменим этого отношения, следовательно,

$$C:C_1=2R:2R_1, \text{ откуда: } C:2R=C_1:2R_1,$$

т. е. *отношение длины окружности к ее диаметру есть число постоянное для всех окружностей.*

Число это, обозначаемое греческою буквою π, равно 3,1415...

Из равенства $C:2R=\pi$ выводим:

$$C=2\pi R.$$

313. Площадь круга. Пусть P, p и a будут площадь, периметр и апофема какого-нибудь правильного многоугольника, вписанного в круг радиуса R. Тогда, как известно,

$$P=\frac{1}{2}pa.$$

Если станем неограниченно удваивать число сторон этого многоугольника, то величины P, p и a сделаются переменными,

причем p стремится к пределу, называемому длиною C окружности, а a стремится к R. Так как предел произведения равен произведению пределов, то

$$\text{пред. } P = \text{пред. } \frac{1}{2} p \cdot \text{пред. } a = \frac{1}{2} C \cdot R.$$

Этот предел принимается за меру площади круга. Подставив вместо C произведение $2\pi R$, найдем:

$$\text{площадь круга} = \pi R^2.$$

314. Боковая поверхность цилиндра и конуса. Пусть p и a будут периметр и апофема правильного многоугольника, вписанного в окружность основания цилиндра или конуса, H — высота цилиндра и L — образующая конуса. Впишем в цилиндр призму и в конус пирамиду, приняв за их основания правильные многоугольники, вписанные в окружность основания. Тогда:

$$\text{бок. пов. призмы} = pH;$$
$$\text{„ \quad „ \quad пирамиды } \frac{1}{2} pl,$$

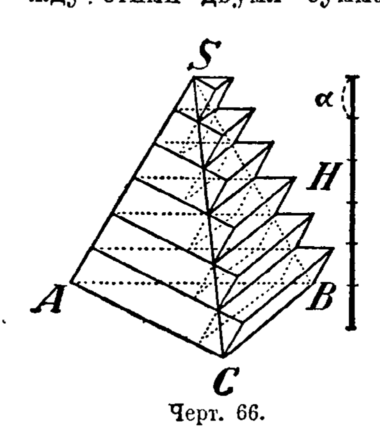
где l есть апофема вписанной пирамиды. Вообразим теперь, что число сторон вписанного многоугольника (следовательно, и число боковых сторон призмы и пирамиды) неограниченно удваиваются. Тогда p стремится к C и l к L; следовательно:

$$\text{пред. бок. пов. призмы} = CH;$$
$$\text{„ \quad „ \quad „ \quad пирамиды} = {}^1/_2 CL.$$

Пределы эти принимаются за численные величины боковых поверхностей цилиндра и конуса.

315. Объем пирамиды. Пусть $SABC$ (черт. 66) будет трехгранная пирамида. Обозначим ее объем V, площадь основания P и высоту H (она изображена отдельно). Разделим высоту на n равных частей (на чертеже высота разделена на 6 равных частей) и через точки деления проведем секущие плоскости, параллельные основанию ABC. В сечениях получатся треугольники, подобные ABC и площади которых относятся между собою, как квадраты их расстояний от вершины пирамиды. Беря каждый из этих треугольников за основание, построим, как видно из чертежа, ряд трехгранных призм, выходящих некоторою своею частью за пирамиду и имеющих высоту $\frac{1}{n} H = a$. Всего таких призм,

очевидно, окажется n. Сумма их объемов, конечно, больше объема пирамиды. Докажем, что при неограниченном увеличении n эта сумма стремится к пределу, равному объему V пирамиды. Для этого, беря каждый треугольник сечений за верхнее основание призмы, построим еще ряд призм, входящих внутрь пирамиды (на чертеже их боковые ребра изображены пунктирными линиями) и имеющих каждая высоту $\frac{1}{n}H=a$. Таких призм окажется, очевидно, $n-1$. Сумма их объемов менее объема пирамиды, так что величина объема пирамиды V заключена между суммой $n-1$ объемов призм входящих и суммою n объемов призм выходящих. Поэтому, если мы докажем, что разность между этими двумя суммами стремится к нулю, когда число n делений высоты (следовательно, и число призм) неограниченно увеличивается, то отсюда заключим, что V есть общий предел двух этих сумм.



Черт. 66.

Сравнивая призмы выходящие с призмами входящими, замечаем, что первая сверху выходящая призма равна первой сверху входящей призме, вторая выходящая равна второй входящей, и т. д. до предпоследней $(n-1)$-й выходящей, которая равна последней входящей. Поэтому разность между суммою объемов выходящих и суммою объемов входящих призм равна объему одной выходящей нижней призмы, т. е. равна произведению Pa (так как объем призмы равен произведению площади основания на высоту). При неограниченном увеличении числа делений n число $a=H:n$ стремится к нулю, а потому и произведение Pa стремится к нулю. Но так как разность между суммою объемов выходящих призм и объемом V пирамиды, очевидно, меньше разности между суммою объемов выходящих призм и суммою объемов входящих, то первая разность и подавно стремится к нулю; а это значит, что V есть предел суммы объемов выходящих призм (а также и входящих).

Найдем теперь сумму всех объемов выходящих призм и затем предел этой суммы, который и будет служить численною величиною объема пирамиды.

Обозначим объемы выходящих призм, начиная с верхней, буквами $v_1, v_2, v_3, \dots v_n$, а площади их оснований буквами $\cdot p_3, \dots p_{n-1}, p_n = P =$ пл. ABC. Тогда:

$$v_1 = p_1 a; \; v_2 = p_2 a; \; v_3 = p_3 a; \dots \; v_n = p_n a.$$

Следовательно,

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = a(p_1 + p_2 + p_3 + \quad + \quad)$$

Но

$$\frac{p_1}{p_n} = \frac{a^2}{(na)^2} = \frac{1}{n^2}; \; \frac{p^2}{p_n} = \frac{(2a)^2}{(na)^2} = \frac{2^2}{n^2}; \dots \frac{p_{n-1}}{p_n} = \frac{[(n-1)a]^2}{(na)^2} = \frac{(n-1)^2}{n^2}.$$

Поэтому:

$$p_1 = p_n \cdot \frac{1}{n^2}; \; p_2 = p_n \cdot \frac{2^2}{n^2}; \; p_3 = p_n \cdot \frac{3^2}{n^2}; \dots p_{n-1} = p_n \frac{(n-1)^2}{n^2}.$$

Добавим к этим равенствам еще одно: $p_n = p_n \frac{n^2}{n^2}$ и сложим все их:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = p_n \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^2}.$$

Так как

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ (ч. I, § 244)},$$

то

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = a p_n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2} =$$
$$= p_n a n \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = PH \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

(так как $p_n = P$ и $an = H$).

Дробный множитель, стоящий в этом выражении, может быть представлен так:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Отсюда видно, что предел этого множителя, когда n неограниченно увеличивается, равен

$$\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$V = \text{пред.}\ (v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n) = PH \cdot {}^1/_3 = {}^1/_3 PH,$$

т. е. *объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.*

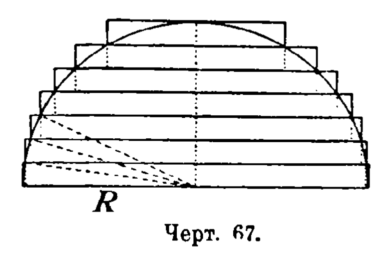
Теорему эту можно распространить на всякую многогранную пирамиду, так как такую пирамиду диагональными плоскостями можно разбить на несколько трехгранных пирамид.

316. Объемы цилиндра и конуса. Рассматривая эти объемы как пределы объемов правильных вписанных призм (для цилиндра) и пирамид (для конуса), мы найдем:

$$\text{Объем цилиндра} = QH,$$
$$\text{„ конуса} = {}^1/_3 QH,$$

где Q есть площадь основания и H высота.

317. Объем шара. Чертеж 67-й представляет вертикальный разрез полушария, радиус которого обозначим R и объем V. Разделим радиус, перпендикулярный к плоскости основания, на произвольное число n равных частей и через точки деления проведем секущие плоскости, параллельные основанию. Приняв каждый круг сечений за нижнее основание цилиндра, построим n цилиндров, выходящих некоторою частью из шара, высотою каждой в $\frac{1}{n}R = a$. Затем, приняв каждый круг сечений за верхнее основание цилиндра, построим еще ряд цилиндров, входящих внутрь шара, с высотою у каждого в $\frac{1}{n}R = a$. Таких цилиндров будет $n - 1$. Обозначим объемы выходящих цилиндров, начиная снизу, буквами: v_1, v_2, $v_3, \ldots v_n$. Тогда объемы входящих цилиндров будут, очевидно, начиная опять снизу: v_2, v_3, $v_4, \ldots v_n$, и разность между суммою выходящих цилиндров и суммою входящих равна одному объему $v_1 = \pi R^2 a$. Если вообразим, что число делений n неограниченно увеличивается, то число $a = \frac{1}{n}R$ будет стремиться к 0. А так как объем полушария меньше суммы объемов выходящих цилиндров, но больше суммы объемов входящих, то разность между первою суммою и объемом полушария V, а также и разность между V и второю суммою, и подавно будет стремиться к нулю. Из этого заключаем, что объем V есть общий предел как суммы выходящих цилиндров, так и суммы входящих.



Черт. 67.

Найдем теперь сумму объемов выходящих цилиндров. Обозначив радиусы оснований этих цилиндров, начиная с нижнего, буквами $r_1 = R$; r_2, $r_3, \ldots r_n$, мы будем иметь:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = \pi a (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_n^2).$$

Из чертежа усматриваем:

$r_1^2 = R^2$; $r_2^2 = R^2 - a^2$; $r_3^2 = R^2 - (2a)^2; \ldots r_n^2 = R^2 - [(n-1)a]^2$.

Следовательно:

$$r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 = nR^2 - a^2[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2] =$$
$$= nR^2 - a^2 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

и

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \pi \left[anR^2 - a^3 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right].$$

Но

$$an = R \text{ и } a = \frac{R}{n};$$

поэтому:

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \pi \left[R^3 - \frac{R^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right] =$$
$$= \pi R^3 \left(1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} \right) =$$
$$= \pi R^3 \left(1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} \right).$$

Найдем теперь предел этого выражения, если $n \to \infty$:

$$\text{пред.} \frac{n-1}{n} = \text{пред.} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$
$$\text{пред.} \frac{2n-1}{n} = \text{пред.} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2.$$

Следовательно,

$$\text{пред.} (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = \pi R^3 (1 - \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2) = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

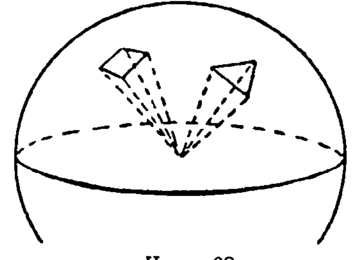
Отсюда:

$$\text{Объем шара} = 2V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{1}{6} \pi D^3,$$

где D означает диаметр шара [1]).

[1]) Таким же путем можно найти объем сферического слоя и объем сферического сегмента.

318. Поверхность шара. Эту поверхность можно найти как предел поверхности, производимой вращением правильной ломаной линии, вписанной в полуокружность, вокруг диаметра этой полуокружности [1]). Но если предварительно найдена формула, выражающая объем шара, то величину поверхности шара можно найти весьма просто. Для этого можно воспользоваться таким простым рассуждением (не вполне, впрочем, строгим).



Черт. 68.

Вообразим, что вся поверхность шара (черт. 68) разделена на очень большое число маленьких участков (произвольной формы) и что из всех точек контура каждого участка проведены к центру радиусы. Тогда шар разобьется на очень большое число маленьких тел, из которых каждое можно уподобить пирамиде с вершиною в центре шара, с основанием, равным участку поверхности шара, и с высотою, равною радиусу шара. Объем каждой из этих пирамидок равен $\frac{1}{3}sR$, если s означает поверхность участка и R радиус шара. При сложении объемов всех пирамидок можно вынести за скобки общим множителем $\frac{1}{3}R$; тогда внутри скобок получится сумма всех участков, которая составит полную поверхность S шара. Значит, объем шара равен $\frac{1}{3}RS$. Но так как, с другой стороны, тот же объем шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$, то мы можем написать уравнение:

$$\frac{1}{3}RS = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

откуда:

$$S = \frac{4}{3}\pi R^3 : \frac{1}{3}R = 4\pi R^2.$$

Так как πR^2 выражает площадь большого круга шара, то можно сказать, что *поверхность шара равна учетверенной площади большого круга.*

---

[1]) См. А. Киселев — „Элементарная геометрия". §§ 424—429

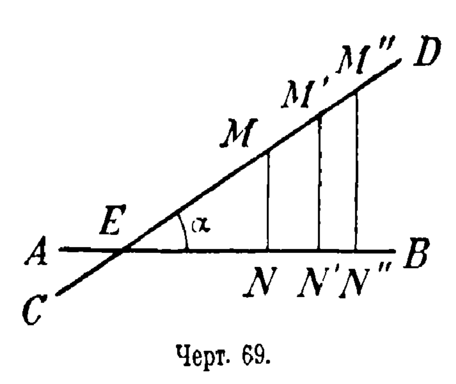
ОТДЕЛ ПЯТНАДЦАТЫЙ.

ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ.

Глава первая.

Подъем прямой и кривой.

319. Подъем прямой. Подъемом какой-нибудь прямой CD (черт. 69) по отношению к горизонтальной прямой AB называется иногда угол α, образуемый этими прямыми. Напр., говорят: „дорога идет в гору с подъемом в 5°“. Но чаще подъем выражается не самим углом α, а его тангенсом. Для нахождения величины тангенса вообразим, что на прямой CD мы взяли произвольную точку M и из нее провели $MN \perp AB$. Тогда из тр-ка MEN находим:



Черт. 69.

$$tg\,\alpha = \frac{MN}{EN}.$$

Точку M можно брать на прямой CD произвольно, так как если возьмем другие точки $M', M'', \ldots$, то, проведя перпендикуляры $M'N'$, $M''N''$, мы получим подобные треугольники, из которых видно, что

$$\frac{MN}{EN} = \frac{M'N'}{EN'} = \frac{M''N''}{EN''} = \ldots$$

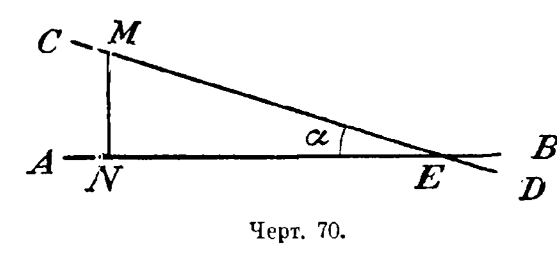
Если, напр., $MN = {}^1/_{100} EN$, то и $M'N' = {}^1/_{100} EN'$, $M''N'' = {}^1/_{100} EN''$ и т. д.; тогда можно сказать, что подъем прямой

CD равен $^1/_{100}$ (или что все равно — равен 1 метру на протяжении 100 метров по горизонтальному направлению).

На чертеже 70 изображена прямая CD, тоже наклонная к горизонтальной прямой AB, но идущая (слева направо) не в гору, а вниз. Тогда речь может итти не о подъеме прямой CD, а об ее *уклоне*. Уклон этот тоже измеряется чаще всего тангенсом угла α, образованного CD с AB, так что

$$\text{уклон} = \frac{MN}{EN}.$$

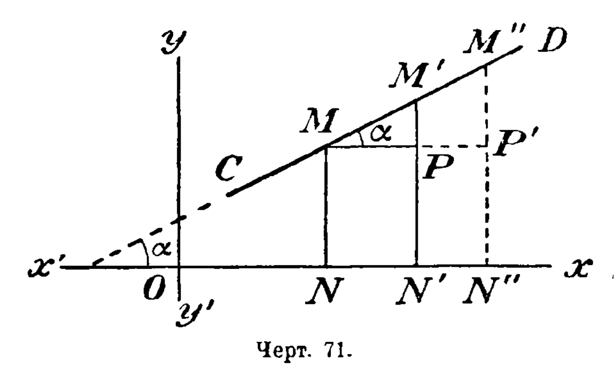
Можно условиться рассматривать уклон *как отрицательный подъем;* тогда, если $MN = {}^1/_2 EN$, то можно сказать, что уклон прямой CD равен $^1/_2$, или — другими словами — что подъем прямой CD равен $-{}^1/_2$.



Черт. 70.

Очевидно, что когда прямая CD не наклонна к AB, а параллельна ей или сливается с нею, тогда подъем равен нулю.

Положим теперь, что горизонтальная прямая будет ось x-ов (черт. 71). Тогда подъем прямой CD будет тангенс угла α, образованного этой прямою (продолженной, если нужно) с положительным направлением оси x-ов. Этот подъем можно найти и не продолжая CD до пересечения с осью x-ов. Для этого возьмем две какие-нибудь точки на прямой CD (черт. 71), напр., M и M', проведем их ординаты MN и $M'N'$ и прямую $MP \parallel Ox$. Тогда мы получим прямоугольный тр-к $MM'P$, у которого угол M равен α. Следовательно, подъем прямой CD равен отношению $M'P$ к MP. Отрезок MP, равный NN', показывает, насколько увеличилась абсцисса ON при переходе от точки M к точке M'; отрезок $M'P$ показывает, насколько при этом пере-



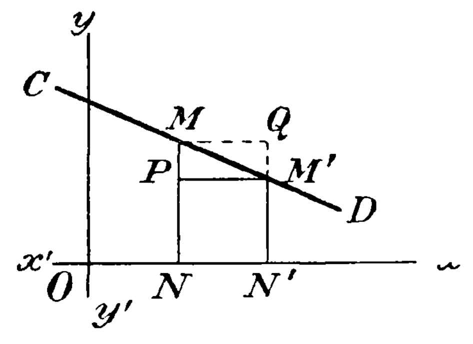
Черт. 71.

ходе увеличилась ордината MN. Значит, отрезок MP, равный NN', есть приращение абсциссы, полученное ею при переходе от точки M к точке M', а $M'P$ — п р и р а щ е н и е ординаты, соответствующее приращению абсциссы на NN'. Конечно, если абсциссе ON дадим иное приращение, напр. NN'', то и ордината MN получит иное приращение $M''P'$, но тангенс угла α попрежнему будет отношение $M''P'$ к NN''. Таким образом:

$$\text{подъем прямой} = \frac{\text{приращение ординаты}}{\text{приращение абсциссы}}$$

в предположении, что эти два приращения *соответствуют* друг другу.

Если прямая CD образует отрицательный подъем (черт. 72), то при положительном приращении абсциссы ON на отрезок NN' приращение ординаты будет отрицательное, а именно $-QM' = -MP$. Тогда отношение отрицательного приращения ординаты к положительному приращению абсциссы будет число отрицательное, что и должно быть, так как уклон есть отрицательный подъем.



Черт. 72.

Положим, для примера, что прямая CD есть график такой линейной функции:

$$y = -\frac{1}{3}x + 2.$$

Дадим абсциссе x произвольное значение, напр. $x = 4$; тогда функция y будет равна:

$$y = -\frac{1}{3} \cdot 4 + 2 = -\frac{4}{3} + 2 = \frac{2}{3}.$$

Пусть теперь абсцисса 4 получит какое-нибудь приращение, напр. 1. Тогда ордината y будет:

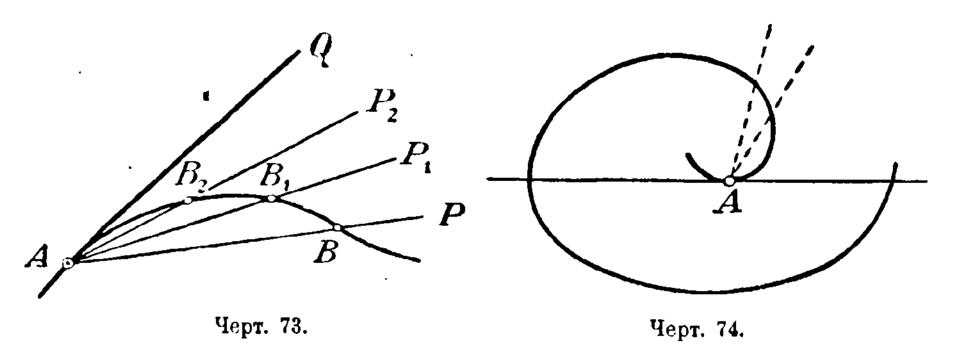
$$y = -\frac{1}{3} \cdot 5 + 2 = -\frac{5}{3} + 2 = \frac{1}{3}$$

и, следовательно, приращение y окажется $1/3 - 2/3 = -1/3$.

$$\text{Поэтому подъем} = \frac{-1/3}{1} = -\frac{1}{3}.$$

Так оно и должно быть, потому что из уравнения прямой: $y = -{}^1/_3x + 2$ видно, что угловой коэффициент есть $-{}^1/_3$, а коэффициент этот, будучи равен тангенсу угла, образованного прямою с положительным направлением оси x-ов, выражает подъем прямой (в данном случае уклон).

320. Общее определение касательной к кривой. Возьмем на кривой, изображенной на чертеже 73-м. какие-нибудь 2 точки A и B и проведем через них секущую AP. Вообразим, что точка B, двигаясь по кривой, проходит через положения B_1, B_2... и приближается к точке A. Тогда секущая AP будет занимать последовательно положения AP_1, AP_2... Если допустим, что точка B приближается к A неограниченно близко, то

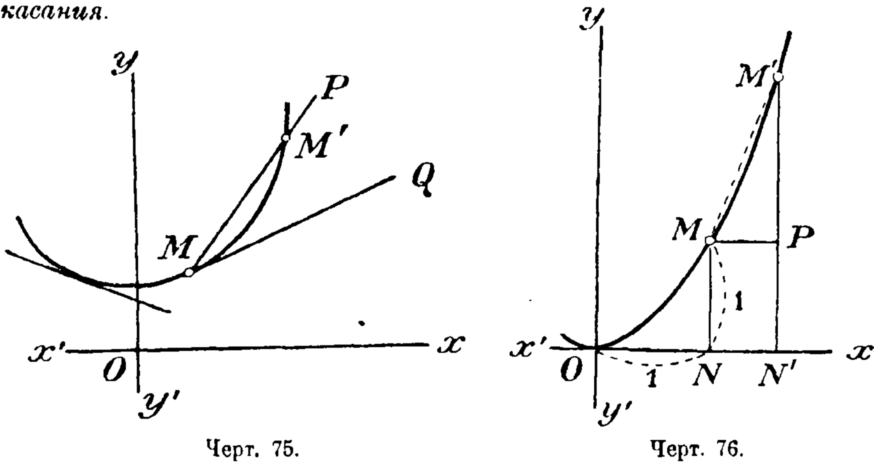


Черт. 73. Черт. 74.

секущая приближается все более и более к некоторому предельному положению AQ так, что угол между прямою AQ и секущей делается и остается меньшим любого данного угла, как бы мал он ни был. *Это предельное положение секущей называется касательной к кривой в точке A.*

Вспомним, что когда в геометрии говорилось о касательной к окружности, то там она определялась как такая прямая, которая с окружностью имеет только одну общую точку. Это определение, верное относительно окружности, применимо однако не ко всякой кривой. Во-первых, прямая, имеющая с кривой только одну общую точку, может в этой точке пересекаться с кривой (незамкнутой, какова, напр., парабола); во-вторых, прямая—касающаяся кривой в какой-нибудь точке, может, кроме этой точки, иметь с кривою еще и другие общие точки (как это видно на чертеже 74). Определение, рассматривающее касательную, как предельное положение секущей, есть общее определение касательной, так как оно применимо ко всякой кривой.

321. Подъем кривой. Возьмем на кривой, изображенной на чертеже 75-м, 2 какие-нибудь точки M и M' и проведем через них секущую MP. Подъем этой секущей выразит нам то, что называется средним подъемом кривой на участке ее от M до M'. Вообразим, что точка M' неограниченно приближается к M. Тогда секущая будет все ближе и ближе подходить к касательной MQ, проведенной к кривой в точке M, и средний подъем кривой все ближе и ближе будет подходить к равенству с подъемом касательной. Условимся *принимать подъем касательной, проведенной к кривой, за подъем самой кривой в точке касания.*



Черт. 75. Черт. 76.

322. Подъем параболы $y = x^2$. Положим, что кривая будет парабола, выражаемая уравнением $y = x^2$. Вычислим подъем ее в точке M (черт. 76), у которой абсцисса равна 1. Тогда ее ордината будет $MN = ON^2 = 1^2 = 1$. Чтобы найти подъем кривой в точке M, предварительно вычислим средний подъем на участке от точки M до какой-нибудь другой точки M', у которой абсцисса $ON' = ON + NN'$ и ордината $M'N' = M'P + PN' = M'P + MN$. Чтобы перейти от M к M', надо абсциссе ON дать приращение NN'; тогда ордината получит соответствующее приращение $M'P$ и

$$\text{подъем секущей} = \frac{M'P}{MP} = \frac{M'P}{NN'}.$$

Пусть $NN' = 0,9$. Тогда $ON' = 1 + 0,9 = 1,9$ и $M'N' = 1,9^2 = 3,61$. Значит, $M'P = 3,61 - 1 = 2,61$ и

$$\text{подъем секущей} = \frac{2,61}{0,9} = 2,9.$$

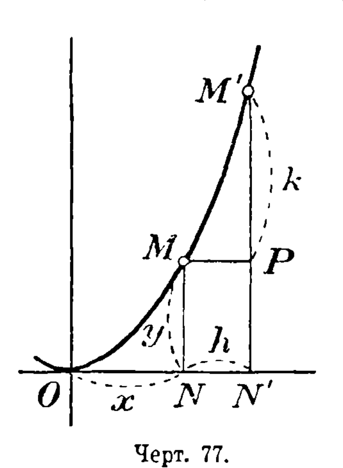
Станем теперь уменьшать приращение NN', приближая его к нулю: тогда точка M' будет приближаться все ближе и ближе к точке M, и средний подъем кривой будет приближаться к равенству с подъемом кривой в точке M (с подъемом касательной в точке M). Будем, напр., для NN' назначать такие последовательно уменьшающиеся числа:

$$0{,}9;\ 0{,}8;\ 0{,}7;\ 0{,}6;\ 0{,}5;\ \ldots 0{,}1.$$

Выпишем все числа, которые при этом получаются, в такой таблице:

NN' . . .	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
ON' . . .	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1
$M'N' = (ON')^2$.	3,61	3,24	2,89	2,56	2,25	1,96	1,69	1,44	1,21
$M'P = M'N' - MN$	2,61	2,24	1,89	1,56	1,25	0,96	0,69	0,44	0,21
Подъем $\frac{M'P}{NN'}$ . . .	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1

Мы видим из этой таблицы, что по мере приближения точки M' к M подъем секущей все уменьшается, приближаясь все более и более к числу 2, так что весьма вероятно, что подъем секущей (средний подъем кривой) стремится к пределу 2, когда приращение $NN' \longrightarrow 0$. Если это так, то подъем параболы в точке M, имеющей абсциссу 1 и ординату 1, равен 2. Мы сейчас увидим, что это действительно так.



Черт. 77.

Положим, мы взяли на параболе (черт. 77) точку M, у которой абсцисса не 1, как мы сейчас предположили, а какое-нибудь иное число x единиц. Тогда у этой точки ордината тоже будет не 1, а другое число y, определяемое уравнением $y = x^2$.

Дадим числу x приращение, которое мы обозначим одною буквою h, так что теперь абсцисса сделается $ON' = x + h$. Тогда

y получит приращение $M'P$, которое обозначим k. Из чертежа видно, что

$$k = M'N' - MN = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2hx + h^2 - x^2 = \\ = 2hx + h^2 \text{ и}$$

$$\text{подъем секущей} = \frac{k}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h.$$

Положим теперь, что $h \rightarrow 0$, следовательно, точка M' неограниченно приближается к M. Найдем предел, к которому при этом стремится отношение $\frac{k}{h}$, равное сумме $2x+h$. Так как x остается без изменения, то очевидно, что

$$\text{если } h \rightarrow 0, \text{ то } 2x + h \rightarrow 2x.$$

Значит, подъем параболы в точке с абсциссой x равен $2x$. Например, для точки с абсциссой 1 подъем будет $2 \cdot 1 = 2$, что мы и предвидели, когда вычисляли подъем для уменьшающихся приращений: 0,9; 0,8; 0,7; ... 0,1. Для точки с абсциссой 2 подъем будет $2 \cdot 2 = 4$, для точки с абсциссой $2^1/_2$ он окажется $2^1/_2 \cdot 2 = 5$ и т. п.

Глава вторая.

Понятие о производной функции, как выражающей подъем кривой.

323. Определение и обозначение. Мы видели в предыдущем параграфе, что подъем кривой зависит от величины абсциссы той точки, в которой определяется подъем: он есть некоторая функция от абциссы x.

Функция, выражающая подъем кривой в какой нибудь-точке ее в зависимости от абсциссы этой точки, называется производной функцией от той функции, *которая выражает эту кривую.*

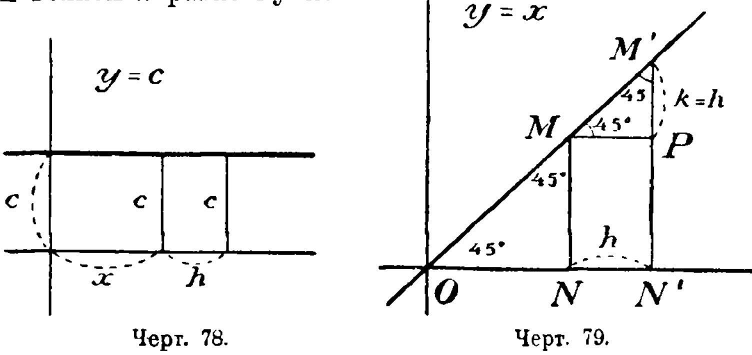
Так, для параболы $y = x^2$, как мы видели, подъем кривой в точке с абциссой x равен $2x$; эта функция $2x$ называется производной (функцией) от функции x^2.

Производную функцию принято обозначать посредством знака $'$, поставленного с правой стороны над выражением той функции, от которой берется производная. Так, если функция обозначена одною буквой y, то производная от нее обозначается y'; если функция задана каким-нибудь алгебраическим выражением, то производную можно обозначать тем же выражением,

но со знаком $'$. Так, можно написать: $(x^2)'=2x$, что читается так: производная от x^2 равна $2x$.

324. Производная от постоянного числа. Пусть функция задана уравнением: $y=c$, где c есть какое нибудь постоянное число. Уравнение это, как мы знаем (ч. I, § 117), выражет прямую, параллельную оси x-ов и отсекающую от оси y-ов отрезок c (черт. 78). Подъем такой прямой во всякой точке ее равен нулю; значит, $c'=0$, т.-е. *производная от постоянного числа равна нулю.*

И действительно, какое бы приращение h мы не дали абсциссе x, ордината y остается неизменной (равной c): значит, приращение k ординаты всегда равно нулю, а потому и отношение $\frac{k}{h}$ при всяком h равно нулю.



Черт. 78. Черт. 79.

325. Производная от функции $y=x$. Функция эта выражает, как мы видели (ч. I, § 111), биссектрису углов xOy и $x'Oy'$ (черт. 79). Для такой прямой при всякой абциссе $x=ON$ соответствующая ордината MN равна этой абсциссе и при всяком приращении h абсциссы соответствующее приращение ординаты k будет также h (треугольник $M'PM$ равнобедренный). Следовательно,

$$\text{подъем прямой} = \frac{k}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Таким образом:

$$x' = 1.$$

т. е. *производная от переменного независимого равна 1.*

Это же видно и из уравнения $y=x$, в котором угловой коэффициент, выражающий подъем, есть 1.

326. Производная от функции $y=ax$. Эта функция выражает прямую AA' (черт. 80), проходящую через начало коорди-

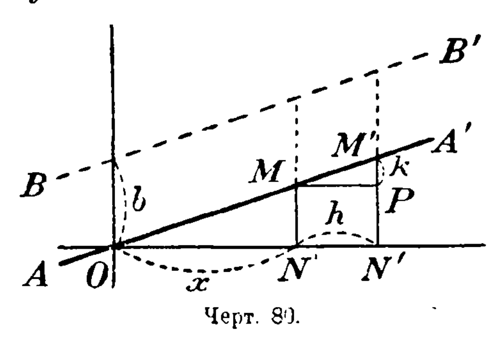
нат (ч. I, § 109). Если $ON = x$ получает приращение $NN' = h$, то y получит приращение $M'P = k$, равное:

$$M'N' - MN = a(x + h) - ax = ah.$$

Значит:

подъем $= (ax)' = \frac{k}{h} = \frac{ah}{h} = a$, т. е. производная от функции $y = ax$ равна угловому коэффициенту.

327. Производная от функции $y = ax + b$. Эта функция выражается прямой BB' (черт. 80), отсекающей от оси y-ов отрезок b и имеющей угловой коэффициент a. Если дадим абсциссе x приращение h, то ордината y получит приращение k, равное



Черт. 80.

$$k = [a(x + h) + b] - (ax + b) = ax + ah + b - ax - b = ah.$$

Следовательно,

$$(ax + b)' = \text{подъем} = \frac{k}{h} = \frac{ah}{h} = a,$$

что и надо было ожидать, так как подъем прямой во всякой ее точке равен угловому коэффициенту.

Обратим внимание на то, что в этом примере производная от суммы $ax + b$ равна сумме производных от слагаемых. Действительно, $(ax)' = a$, $b' = 0$ и $a + 0 = a$; а это есть $(ax + b)'$.

328. Производная от функции $y = ax^2$. Эта функция геометрически выражается, как мы знаем (ч. I, § 158), параболой. Чтобы найти подъем этой параболы в точке с абсциссой x (черт. 77), дадим этой абсциссе приращение h; тогда ордината y получит приращение

$$k = a(x + h)^2 - ax^2 = ax^2 + 2ahx + ah^2 - ax^2 = 2ahx + ah^2.$$

Следовательно, средний подъем параболы $y = ax^2$ на участке от точки с абсциссой x до точки с абсциссой $x + h$, будет

$$\frac{k}{h} = \frac{2ahx + ah^2}{h} = 2ax + ah.$$

Если $h \to 0$, то и $ah \to 0$, а $2ax$ остается без изменения; след., подъем будет:

$$(ax^2)' = \text{пред.}\,\frac{k}{h} = \text{пред.}\ (2ax + ah) = 2ax.$$

Таким образом, *производная от одночлена ax^2 равна показателю при x, умноженному на такой же одночлен, у которого только показатель уменьшен на 1.*

Так:

$$(x^2)' = 2x;\ (2x^2)' = 4x;\ (3x^2)' = 6x;\ \text{и т. п.}$$

Глава третья.

Общие обозначения.

329. Общее обозначение функциональной зависимости. Чтобы кратко обозначить, что переменное число y есть функция от переменного независимого числа x, принято писать так:

$$y = f(x).$$

Здесь буква f есть первая буква французского слова „*fonction*", что значит: „функция". Следовательно, равенство это читается так: *y есть функция от x.* Какая это функция, этим обозначением не выражается; выражается только, что y есть некоторая функция от x. Напр., в частных случаях может быть:

$$f(x) = 3x;\ f(x) = x^2;\ f(x) = ax^2;\ f(x) = x^2 - 2x + 5\ \text{и т. п.}$$

Вместо f иногда употребляются буквы F, φ, Φ и некоторые другие. Если, напр., написано:

$$y = f(x),\ u = F(x),$$

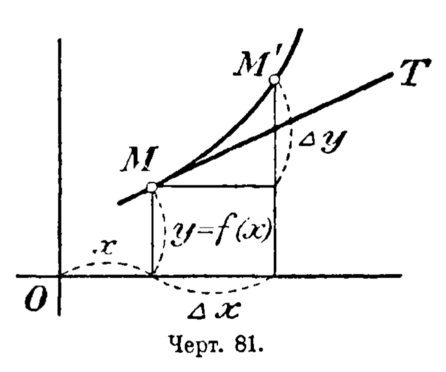
то этим выражено, что переменные числа y и u суть некоторые функции от одного и того же переменного числа x, но функции эти различны.

Если функция обозначена $f(x)$, то ее производную можно обозначить $f'(x)$. Так, из равенства: $f(x) = ax^2$ выводим: $f'(x) = 2ax$.

330. Общее обозначение приращений. До сего времени мы обозначали приращение переменного независимого числа x [1]) буквою h, а соответствующее приращение самой функции y буквою k. Принято также обозначать слово „приращение" гре-

[1]) Аргумента функции.

ческою буквою Δ (дельта), поставленною перед обозначением того переменного независимого или той функции, которая получает приращение. Так, Δx означает: „приращение числа x"; равным образом $\Delta f(x)$ означает: „приращение функции $f(x)$". Значит, в таких обозначениях буква Δ не означает числа, а заменяет слово „приращение", подобно тому, как в выражении $f(x)$ буква f не означает числа, а только слово „функция".



Черт. 81.

331. Определение производной как предела отношения приращений. Пусть функция $y=f(x)$ изображена посредством координатных осей в виде кривой на чертеже 81-м и пусть на этой кривой взяты 2 точки $M(x, y)$ и $M'(x+\Delta x, \ y+\Delta y)$. Тогда на участке кривой от точки M до M'

$$\text{средний подъем} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Предел этого среднего подъема, когда $\Delta x \to 0$, есть подъем кривой в точке M (подъем касательной MT) и называется, как мы говорили, производной функцией от $f(x)$. Значит, мы можем написать:

$$f'(x) = \text{пред.} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ если } \Delta x \to 0.$$

Так как $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, то это равенство можно переписать так:

$$f'(x) = \text{пред.} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \text{если } \Delta x \to 0.$$

Таким образом можно высказать следующее определение производной:

Производной функцией от функции $f(x)$ называется предел, к которому стремится отношение приращения этой функции к соответствующему приращению переменного независимого x, если это последнее приращение стремится к нулю.

332. Производная от произведения постояного числа на функцию. Пусть $y=af(x)$, где a есть постоянное число и $f(x)$

какая-нибудь функция. Согласно данному сейчас определению, мы будем иметь:

$$[af(x)]' = \text{пред.}\frac{af(x+\Delta x)-af(x)}{\Delta x},\ (\text{если } \Delta x \to 0) =$$

$$= \text{пред. } a\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = a \text{ пред.}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = af'(x),$$

что можно высказать так:

Производная от произведения какой-нибудь функции на постоянное число равна произведению этого постоянного числа на производную от функции.

Напр., $(ax)' = ax' = a \cdot 1 = a$; $(ax^2)' = a(x^2)' = a \cdot 2x = 2ax$.

333. Производная от алгебраической суммы. Мы уже видели раньше (§ 327) что

$$(ax+b)' = (ax)' + b' = a + 0 = a,$$

т. е. что производная от суммы равна сумме производных от слагаемых. Убедимся теперь в общности этого свойства. Пусть u, v и w будут какие-нибудь функции от одного и того же переменного независимого x и пусть y есть алгебраическая сумма этих функций, напр., такая:

$$y = u + v - w.$$

Если x получит приращение Δx, то функции u, v, w и y получат некоторые приращения Δu, Δv, Δw и Δy, причем очевидно, что в нашем примере:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Так как предел алгебраической суммы равен той же сумме пределов слагаемых, то когда $\Delta x \to 0$:

$$\text{пред.}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{пред.}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \text{пред.}\frac{\Delta v}{\Delta x} - \text{пред.}\frac{\Delta w}{\Delta x},$$

т. е.

$$y' = u' + v' - w'.$$

Таким образом:

Производная от алгебраической суммы равна той же сумме производных от слагаемых.

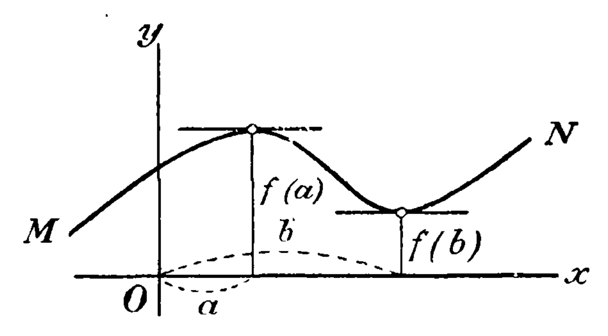
Пользуясь этим свойством, мы легко можем найти *производную от трехчлена 2-й степени.* Напр.:

$$1)\ (2x^2+5x-3)'=(2x^2)'+(5x)'-(3)'=4x+5-0=4x+5.$$
$$(^1/_2x^2+2)'=(^1/_2x^2)'+2'=^1/_2\cdot 2x+0=x.$$

Глава четвертая.

Признаки возрастания или убывания функций. Признаки вогнутости или выпуклости кривой.

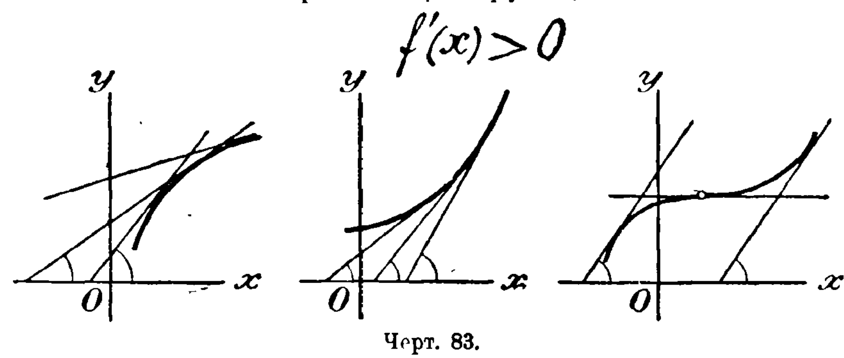
334. Maximum и minimum. Положим, что функция $y=f(x)$ графически изображается в виде некоторой непрерывной кривой MN (черт. 82). Рассматривая эту кривую, мы видим, что когда x возрастает (положим, от нуля), функция сначала возрастает до некоторого значения $f(a)$ при $x=a$, а потом убывает. Тогда значение $f(a)$ называется *maximum* функции, или ее наибольшим значением; при этом разумеется, что это значение не есть наибольшее из всех возможных значений, а только из всех значений, соседних с $f(a)$ как справа, так и слева. Из того же чертежа видно, что при дальнейшем возрастании x функция убывает до некоторого значения $f(b)$ при $x=b$, а затем возрастает. Тогда значение $f(b)$ называется *minimum* функции, или ее наименьшим значением, причем опять-таки разумеется, что это значение не есть наименьшее из всех возможных, а только из всех соседних значений как справа, так и слева.



Черт. 82.

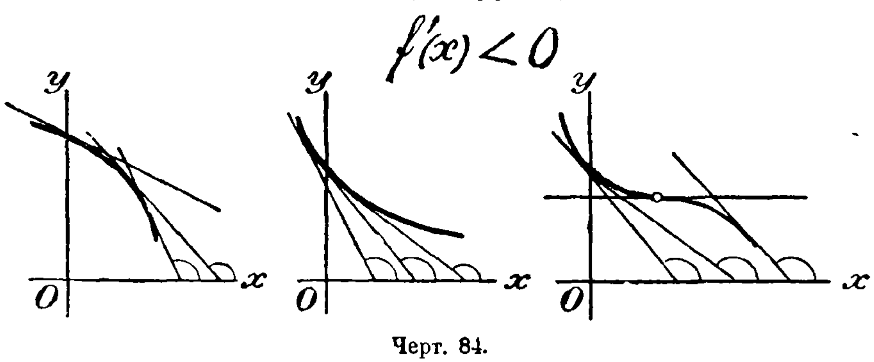
Иногда случается, что при возрастании x от $-\infty$ до $+\infty$ функция все возрастает, или все убывает, или же остается неизменной; тогда функция не имеет ни *maximum*, ни *minimum*. Таковы, напр., линейная функция $y=ax+b$, показательная функция $y=a^x$ (ч. I, черт. 61) и логарифмическая функция $y=\log_a x$ (ч. I, черт. 62).

335. Признаки возрастания или убывания функций. Если при возрастании x функция $f(x)$ тоже возрастает (такая функция называется в о з р а с т а ю щ е й), то, как видно из чертежа 83-го,



Черт. 83.

касательные, проведенные к кривой, изображающей функцию, образуют с положительным направлением оси x-ов о с т р ы е углы, причем для некоторых отдельных (особых) точек кривой (напр., для точки, указанной кружком, чертеж 83-й, правый) касательная может образовать и угол в 0°. Если же при возра-



Черт. 84.

стании x функция убывает (такая функция называется у б ы в а ю щ е й), то касательные (черт. 84) образуют с положительным направлением оси x-ов т у п ы е углы, причем для некоторых отдельных точек кривой касательная может образовать и угол 0° (черт. 84-й, правый). Так как тангенсы острых углов положительны, а тупых — отрицательны, и тангенсы углов, образованных

касательными с положительным направлением оси x-ов, равны производным, то мы приходим к таким выводам:

1) Если $f(x)$ при изменении x между какими-нибудь границами есть функция возрастающая, то ее производная для значений x, лежащих между этими границами, положительна, причем для отдельных значений x она может равняться нулю (черт. 83).

2) Если $f(x)$ при изменении x между какими-нибудь границами есть функция убывающая, то ее производная для значений x, лежащих между этими границами, отрицательна, причем для отдельных значений x она может равняться нулю (черт. 84).

3) Наконец, если $f(x)$ при изменении x между какими-нибудь границами не изменяется (есть постоянное число), то ее производная для значений x, лежащих между этими границами, равна нулю, так как производная постоянного числа есть нуль

Заметив все это, мы можем высказать и обратные предложения:

1) Если при изменении x между какими-нибудь границами производная положительна (причем для отдельных значений она может равняться нулю), то функция между этими границами возрастает.

2) Если при изменении x между какими-нибудь границами производная отрицательна (причем для отдельных значений она может равняться нулю), то функция между этими границами убывает.

3) Если при изменении x между какими-нибудь границами производная остается равной нулю, то функция равна постоянному числу.

Из чертежа 82-го видно, что если при некотором значении $x=a$ (или $x=b$) функция $y=f(x)$ имеет наибольшее или наименьшее значение, то касательная к кривой, изображающей функцию, проведенная через точку с абсциссой a (или b), параллельна оси x-ов (другими словами, образует с нею угол в 0°); следовательно, производная функция при $x=a$ (или $x=b$) должна равняться нулю. Но так как производная может равняться нулю и в других случаях (черт. 83 правый или черт. 84 правый), то обратное предложение нельзя считать верным, т. е. если при некотором значении $x=a$ производная равна нулю, то из этого одного еще не следует, чтобы при $x=a$ функция имела наибольшее или наименьшее значение.

Для примера приложим все сказанное к такому трехчлену второй степени:

$$y = 2x^2 - 3x + 1.$$

Производная этого трехчлена для всякого значения x равна

$$y' = 4x - 3.$$

Чтобы узнать, для каких значений x эта производная положительна и для каких отрицательна, надо решить два неравенства:

$$1)\ 4x - 3 > 0;\ \text{откуда}\ x > \frac{3}{4};$$

$$2)\ 4x - 3 < 0;\quad „\quad x < \frac{3}{4}.$$

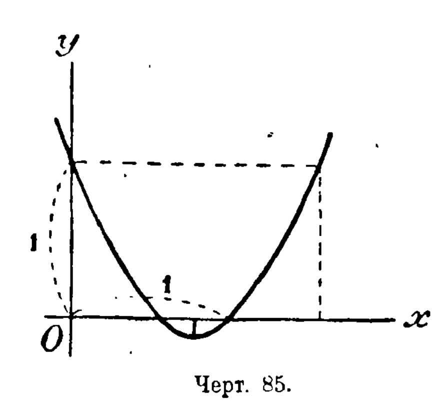
Значит, для всех значений x, больших $^3/_4$, трехчлен возрастает, а для всех значений x, меньших $^3/_4$, он убывает. Следовательно, при $x = {}^3/_4$ трехчлен переходит через наименьшее значение, которое равно:

$$2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{4}\right) + 1 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 1 = -\frac{1}{8}$$

Следующая таблица и чертеж 85-й наглядно изображают процесс изменения данного трехчлена:

$$y = 2x^2 - 3x + 1.$$

x	0	$^1/_4$	$^1/_2$	$^3/_4$	1	$1^1/_4$	$1^1/_2$	$1^3/_4$	2	$2^1/_4$	...
y	1	$^3/_8$	0	$-{}^1/_8$	0	$^3/_8$	1	$1^7/_8$	3	$4^3/_8$	...



Черт. 85.

Возьмем еще трехчлен в общем виде:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Производная этого трехчлена равна:

$$y' = 2ax + b.$$

Решим теперь два следующих неравенства:

1) $2ax + b > 0$; откуда:

$$x > -\frac{b}{2a},\ \text{если}\ a > 0$$

$$\text{и}\ x < -\frac{b}{2a},\ \text{если}\ a < 0;$$

2) $2ax+b<0$; откуда: $x<-\frac{b}{2a}$, если $a>0$

и $x>-\frac{b}{2a}$, если $a<0$.

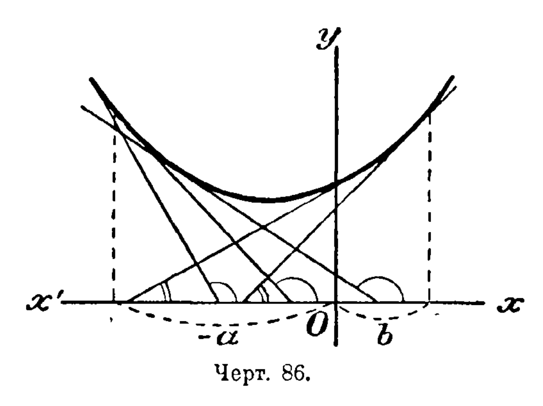
Значит, если $a>0$, то трехчлен возрастает при $x>-\frac{b}{2a}$ и убывает при $x<-\frac{b}{2a}$; если $a<0$, то, наоборот, при $x>-\frac{b}{2a}$ трехчлен убывает, а при $x<-\frac{b}{2a}$ он возрастает.

Отсюда следует, что при $x=-\frac{b}{2a}$ трехчлен получает наименьшее значение при $a>0$ и наибольшее при $a<0$; и то и другое равно:

$$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c=\frac{b^2-2b^2}{4a}+c=$$
$$=\frac{-b^2+4ac}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Все это вполне согласуется со сказанным нами ранее в § 227, ч. I.

336. Признаки выпуклости или вогнутости кривой. Предположим, что при возрастании x производная от данной функции тоже возрастает. В геометрическом смысле это значит, что при возрастании x подъем кривой, выражающей данную функцию, увеличивается; другими словами, увеличиваются тангенсы углов, образованных касательными с положительным направлением оси x-ов. Но если увеличиваются тангенсы, то и самые углы увеличиваются Такой случай изображен на чертеже 86-м на котором видно, что при возрастании абсциссы x точки касания от $-a$ до $+b$ углы, образованные касательными с положительным направлением оси x-ов, становятся все больше и больше, вследствие чего вогнутость кривой обращена кверху (а выпуклость книзу). Если же допустим, что при возрастании x производная уменьшается, то это значит, что уменьшается подъем кривой, и,



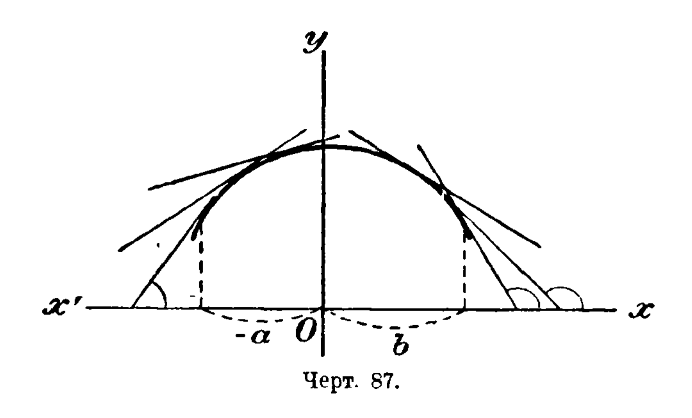
Черт. 86.

значит, уменьшаются углы, образованные касательными с положительным направлением оси x-ов. Такой случай изображен на чертеже 87-м из которого видно, что при возрастании x от $-a$ до $+b$ углы, образованные касательными, уменьшаются, вследствие чего вогнутость кривой обращена вниз (выпуклость вверх).

Таким образом, *если при возрастании x производная возрастает, то вогнутость кривой направлена вверх, а если она при этом убывает, то вогнутость направлена вниз.*

Если же производная не возрастает и не убывает, то кривая не имеет выпуклости (т. е. она прямая).

Напр., производная трехчлена $2x^2 - 3x + 1$, о котором мы говорили в предыдущем параграфе, есть $4x - 3$. Очевидно, она возрастает при возрастании x, и вогнутость параболы, изображающей этот трехчлен, направлена вверх (черт. 85). Наоборот,



Черт. 87.

трехчлен $-x^2 + x + 2$ имеет производную $-2x + 1$, которая при возрастании x убывает, вследствие чего вогнутость параболы обращена вниз.

Глава пятая.

Производная как средство нахождения скорости и ускорения.

337. Средняя скорость. Движение материальной точки называется переменным, или неравномерным, если в одинаковые промежутки времени точка проходит неодинаковые пространства, причем оно называется ускорительным, если

пространства, проходимые в равные промежутки времени, следующие друг за другом, все увеличиваются, и **замедлительным**, если эти пространства все уменьшаются. Напр., всякое тело, свободно падающее с какой-нибудь высоты, движется ускоренно, проходя в первую секунду 4,9 *м* (приблизительно), во вторую секунду 14,7 *м*, в третью 24,5 *м* и т. д. Наоборот, тело, брошенное вертикально вверх, движется замедлительно, проходя в каждую следующую секунду пространства все меньшие и меньшие, пока, достигнув некоторой наибольшей высоты, не станет падать вниз ускоренно.

При равномерном движении скорость остается одна и та же во все время движения, при переменном же движении она меняется с каждым моментом времени. Поэтому, говоря о скорости переменного движения, необходимо добавлять, к какому моменту мы относим эту скорость. Напр., при падении тела скорость в конце 1-й секунды от начала падения будет одна, в конце 2-й секунды другая, в конце $2^1/_2$ секунд третья и т. д. Чтобы выяснить, что называется **скоростью** переменного движения в данный **момент** времени, предварительно разъясним, что такое **средняя скорость** переменного движения за данный **промежуток** времени.

Пусть железнодорожный поезд вышел со станции в 12 ч. дня и пришел на следующую станцию, отстоящую на 15 *км* от первой, в 12 ч. 20 м. дня. Значит, в течение промежутка времени, равного 20 мин., поезд прошел путь в 15 *км*. Если бы в течение этих 20 минут поезд двигался вполне равномерно и прошел бы тот же самый путь в 15 *км*, то скорость такого равномерного движения былабы $15:20 = {}^3/_4$ *км в мин.* или ${}^3/_4 \times 60 = 45$ *км в час*. Эта скорость и есть средняя для промежутка времени от 12 часов до 12 ч. 20 м.

Таким образом:

Среднею скоростью переменного движения за данный промежуток времени называется скорость такого равномерного движения, при котором тело в тот же промежуток времени прошло бы путь такой же длины, какой оно прошло при переменном движении.

Пусть за данный промежуток времени, продолжавшийся t единиц времени, тело прошло переменным движением e единиц длины; тогда, если бы оно двигалось равномерно, то скорость такого равномерного движения была бы равна частному $e:t$. Это частное и выражает среднюю скорость за данный промежуток времени.

338. Скорость в данный момент. В течение данного промежутка времени движущееся неравномерно тело, конечно, имело множество различных скоростей, из которых некоторые были меньше, а другие больше средней скорости; но ясно, что чем меньше промежуток, за который вычисляется средняя скорость, тем меньше разница между этою среднею скоростью и каждою из истинных скоростей, которые тело имело за этот промежуток.

Поэтому понятно будет следующее определение:

За величину истинной скорости переменного движения в данный момент времени принимается предел, к которому стремится средняя скорость, вычисленная для промежутка времени, непосредственно следующего за данным моментом[1]*, если этот промежуток стремится к нулю.*

339. Свободное падение тела. Для примера рассмотрим свободное падение тела с некоторой высоты. Из опыта найдено, что пространство (обыкновенно, оно обозначается буквою h), которое при этом тело проходит в t секунд, выражается (если не считать сопротивления воздуха) формулой:

$$h = {}^1/_2 gt^2,$$

где g есть постоянное число, равное приблизительно 980 *см* = 9,8 *м* (около 10 *м*). Пользуясь этой формулой, вычислим скорость падения, положим, в конце 2-й секунды от начала падения. Для этого возьмем какой-нибудь небольшой промежуток времени, следующий за концом 2-й секунды, напр., в 0,1 сек., и найдем среднюю скорость падения за этот промежуток. Для этого надо найти пространство, которое падающее тело проходит за этот промежуток, и разделить его на 0,1. Пространство это мы найдем так:

в 2 сек. тело проходит $^1/_2 g\cdot 2^2 = 2g$;
" 2,1 " " " $^1/_2 g\cdot 2{,}1^2 = {}^1/_2 g\cdot 4{,}41 = 2{,}205\,g$;

следовательно, в промежуток от конца 2-й сек. до конца 2,1 сек. тело проходит $2{,}205\,g - 2g = 0{,}205\,g$;

средняя скорость за этот промежуток $= \frac{0{,}205\,g}{0{,}1} = 2{,}05\,g$.

Подставив вместо g число 980 *см*, мы получим для средней скорости число 2009 *см* = 20 *м* 9 *см* в секунду.

---

[1] Или ему предшествующего — все равно.

Уменьшим, наконец, промежуток; напр., возьмем 0,01 секунды. Тогда:

в 2 сек. тело проходит $^1/_2 g \cdot 2^2 = 2_k g$;
в 2,01 „ „ „ $^1/_2 g \cdot 2{,}01^2 = {}^1/_2 g \cdot 4{,}0401 = 2{,}02005\, g$;

в промежуток от конца 2-й сек. до конца 2,01 сек. тело проходит $2{,}02005\, g - 2\, g = 0{,}02005\, g$;

средняя скорость за этот промежуток $= \frac{0{,}02005}{0{,}01} g = 2{,}005\, g$.

Мы видим, что средняя скорость приблизилась к $2g$. Если бы еще уменьшить промежуток, напр., взять, 0,001 сек., то средняя скорость еще более приблизилась бы к $2g$ (она тогда была бы $2{,}0005g$), так что надо ожидать, что предел, к которому стремится средняя скорость (когда промежуток времени стремится к нулю), равен в точности $2\, g$. Чтобы убедиться в этом, мы возьмем промежуток времени, выраженный буквою, составим формулу, выражающую среднюю скорость падения тела для этого буквеннного промежутка, и затем найдем предел этой формулы, когда промежуток будет стремиться к нулю. Вместе с тем мы обобщим теперь вопрос: будем искать скорость падения тела не в конце 2-й секунды, а в конце t-й секунды (от начала падения).

Пусть мы берем промежуток времени в k секунд (k — какая-нибудь малая дробь), следующий за концом t-й сек., т. е. промежуток от конца t-й сек. до конца $(t+k)$-й сек. Среднюю скорость за этот промежуток мы находим так же, как находили ее сейчас для конца 2-й сек., а именно:

в t сек. тело проходит $^1/_2 gt^2$;
в $t+k$ сек. „ „ $^1/_2 g(t+k)^2$;
во взятый промежуток „ „ $^1/_2 g[(t+k)^2 - t^2] =$

$$= {}^1/_2 g(t^2 + 2tk + k^2 - t^2) = {}^1/_2 g(2tk + k^2) = gtk + {}^1/_2 gk^2;$$

средняя скорость $= \frac{gtk + {}^1/_2 gk^2}{k} = gt + {}^1/_2 gk$.

Найдем предел, к которому стремится средняя скорость, когда $k \to 0$. Так как предел суммы равен сумме пределов слагаемых и gt есть число постоянное, а предел слагаемого $^1/_2 gk$ есть 0, то, если $k \to 0$,

предел средней скорости $= gt$.

В частности для конца 2-й секунды этот предел равен $g \cdot 2 = 2g$, как мы и ожидали раньше.

Так как предел средней скорости принимается за величину истинной скорости в момент, от которого мы брали промежуток времени, то, обозначая эту скорость буквою v, можем написать:

$$v = gt.$$

Заметив, что произведение gt есть производная от функции $^1/_2\, gt^2$, выражающей пространство h, проходимое падающим телом в t секунд, мы можем написать:

$$v = (^1/_2\, gt^2)' = gt.$$

Таким образом на этом примере мы приходим к заключению: *Скорость переменного движения в конце t-й секунды равна производной от функции, выражающей зависимость пространства, проходимого при этом движении, от времени t, в течение которого это пространство проходится.*

Мы сейчас увидим, что это заключение применимо ко всякому движению.

340. Соотношение между скоростью и производной. Пусть вообще дано движение, в котором пространство e, проходимое телом в t секунд, выражается некоторой функцией от времени t:

$$e = f(t).$$

Найдем скорость этого движения в конце t-й секунды. Для этого дадим времени t какое-нибудь приращение Δt сек., вычислим среднюю скорость для промежутка времени от конца t-й секунды до конца $(t + \Delta t)$-й сек. и затем найдем предел этой средней скорости, когда $\Delta t \to 0$:

в t сек. тело проходит $f(t)$;
в $t + \Delta t$ сек. „ „ $f(t + \Delta t)$;
в указанный промежуток „ „ $f(t + \Delta t) - f(t)$;
средняя скорость $= \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$;
скорость в конце t-й секунды $=$ пред. $\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$.

Разность $f(t + \Delta t) - f(t)$ выражает приращение функции $f(t)$, соответствующее приращению переменного независимого t на Δt. Предел отношения этого приращения к приращению переменного независимого называется производной функцией от $f(t)$.

Значит, обозначив скорость в конце t-й секунды буквой v, мы можем последнее выведенное нами равенство переписать так:

$$v = f'(t).$$

Мы видим таким образом, что заключение, которое мы вывели для скорости падения тела, применимо ко всякому движению.

341. Движение тела, брошенного вертикально вверх. Как пример применения найденной нами зависимости между производной и скоростью рассмотрим еще движение тела, брошенного вертикально вверх с начальною скоростью v_0 (*см* в секунду). Из физики известно, что высота h, на которую такое тело подымается в t сек., выражается следующей функцией от времени:

$$h = v_0 t - {}^1/_2\, gt^2,$$

где g есть то постоянное число (равное приблизительно 980 *см*), которое мы встречали в формулах свободного падения тела. Скорость v такого движения в конце t-й секунды, согласно сказанному в предыдущем §, выразится так:

$$v = (v_0 t - {}^1/_2\, gt^2)'.$$

Производная от алгебраической суммы равна той же сумме производных от слагаемых (§ 333); поэтому:

$$v = (v_0 t)' - ({}^1/_2\, gt^2)'.$$

Мы видели (§§ 326, 328), что $(ax)' = a$ и $(ax^2)' = 2ax$.

Значит, заменяя x на t, мы будем иметь:

$$(v_0 t)' = v_0 \text{ и } ({}^1/_2\, gt^2)' = 2 \cdot {}^1/_2\, gt = gt.$$

Следовательно,

$$v = v_0 - gt.$$

Из этой формулы видно, что с возрастанием времени скорость уменьшается и притом равномерно, так как с каждым увеличением времени на одну единицу скорость уменьшается на одну и ту же величину g. Такое движение называется равномерно-замедлительным, а величина, на которую скорость уменьшается в течение каждой секунды, называется отрицательным ускорением этого движения (при свободном падении тела ускорение положительное). Два движения — равномерно-ускорительное и равномерно-замедлительное носят общее название „равномерно-переменное движение“.

Когда время настолько увеличится, что разность $v_0 - gt$, а следовательно, и скорость v, обратятся в нуль, тогда начнется обратное движение — равномерно-ускоренное падение вниз.

Разрешим 4 следующие вопроса: 1) как велико время T, в течение которого тело достигнет наивысшей точки; 2) какова высота H, на которую оно при этом поднимается; 3) какое время T_1 понадобится, чтобы тело с верхней точки упало вниз, и 4) какую скорость v оно приобретет при возвращении назад.

1) Так как при наивысшем поднятии скорость v должна обратиться в нуль, то время T мы найдем из уравнения:

$$v_0 - gT = 0,$$

откуда:

$$T = \frac{v_0}{g}.$$

Напр., при начальной скорости $v_0 = 4900$ *см* в секунду, это время равно $4900 : 980 = 5$ сек.

2) Высоту поднятия H получим из уравнения $h = v_0 t - {}^1/_2\, gt^2$, если на место t подставим $T = \frac{v_0}{g}$:

$$H = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{2v_0^2 - v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Напр., при начальной скорости 4900 *см* в сек. получим:

$$H = \frac{4900^2}{1960} = 12250\, см = 122{,}5\, м.$$

3) Для решения третьего и четвертого вопросов надо пользоваться формулами свободного падения тел:

$$h = {}^1/_2\, gt^2 \text{ и } v = gt.$$

Так как высота H, с которой тело падает вниз, нам уже известна, то время падения T_1 найдется из формулы пространства, если вместо h подставим $H = \frac{v_0^2}{2g}$:

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{gT_1^2}{2}; \quad v_0^2 = g^2 T_1^2; \quad T_1^2 = \frac{v_0^2}{g^2}; \quad T_1 = \frac{v_0}{g}.$$

Таким образом, время падения с верхней точки вниз равно времени поднятия.

4) Скорость v, которую тело получит при возвращении назад, найдется из формулы скорости: $v = gt$, если вместо t подставим $T_1 = \frac{v_0}{g}$:

$$v = g \cdot \frac{v_0}{g} = v_0.$$

Таким образом тело, возвратившись назад, приобретает ту же скорость, с какою началось поднятие вверх.

Должно однако иметь в виду, что эти выводы верны лишь в предположении, что движение совершается в безвоздушном пространстве, так как сопротивление воздуха уменьшает высоту поднятия и уменьшает скорость в конце возвращения.

342. Ускорение при движении. При равномерно-переменном движении ускорением называется положительное или отрицательное приращение скорости в одну единицу времени. При движении равномерно-переменном это приращение одинаково для каждой единицы времени; так, при свободном падении тела оно равно круглым числом $+10$ *м* в секунду, при движении тела, брошенного вертикально вверх, оно составляет около -10 *м* в секунду. Но движение может быть и не равномерно-переменное, когда изменение скорости в течение равных промежутков времени не одно и то же. В таком движении каждому моменту соответствует свое особое ускорение. Чтобы уяснить себе, что при движении неравномерно-переменном принимается за меру ускорения в данный момент, надо предварительно определить так называемое среднее ускорение за данный промежуток времени.

Положим, что за промежуток времени Δt, следующий за концом t-й единицы времени, скорость v данного движения получила приращение (положительное или отрицательное) Δv. Тогда частное $\Delta v : \Delta t$ будет означать приращение скорости в одну единицу времени, если в течение промежутка Δt скорость изменяется равномерно. Частное это называется средним ускорением движения за промежуток Δt, следующий за концом t-й единицы времени. В действительности скорость v изменялась за этот промежуток неравномерно, и потому в продолжение его могло быть бесчисленное множество различных по величине ускорений. Но очевидно, что разность между средним ускорением и каждым из этих ускорений тем меньше, чем меньше промежуток Δt, для которого вычислено среднее ускорение. Поэтому мы можем дать такое определение:

За ускорение неравномерно-переменного движения в данный момент принимается предел, к которому стремится среднее ускорение, вычисленное для промежутка времени, следующего за данным моментом[1]*), когда этот промежуток стремится к нулю.*

Таким образом,

$$\text{ускорение в данный момент} = \text{пред.}\, \frac{\Delta v}{\Delta t},$$
$$\text{если } \Delta t \to 0.$$

343. Соотношение между ускорением и производной от скорости.

Положим, что скорость v есть некоторая функция от времени:

$$v = f(t).$$

Тогда приращение Δv, полученное скоростью в течение промежутка Δt, следующего за концом t-й единицы времени, может выразиться так:

$$\Delta v = f(t + \Delta t) - f(t);$$

следовательно,

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Значит, ускорение в конце t-й единицы времени (обозначим его w), будет:

$$w = \text{пред.}\, \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \text{ если } \Delta t \to 0.$$

Но предел этот есть производная от $f(t)$; поэтому:

$$\text{если } v = f(t), \text{ то } w = f'(t),$$

что можно высказать так:

Ускорение равно производной от функции, выражающей скорость в зависимости от времени.

Как мы видели (§ 340), функция, выражающая скорость, сама есть производная от пространства, выраженного в зависимости от времени; значит, ускорение равно производной от этой производной, т. е. так называемой второй производной от пространства (обозначается знаком $''$).

Например, при свободном падении тела (§ 339):

$$h = {}^1/_2 gt^2, \quad v = ({}^1/_2 gt^2)' = gt$$

и

$$w = ({}^1/_2 gt^2)'' = (gt)' = g,$$

[1]) Или ему предшествующего — все равно.

т. е. ускорение постоянно для всех моментов и равно g (=980 *см* в сек.).

При движении тела, брошенного вертикально вверх (§ 341):

$$h = v_0t - {}^1/_2\,gt^2;\quad v = (v_0t - {}^1/_2\,gt^2)' = v_0 - gt$$

и

$$w = (v_0t - {}^1/_2\,gt^2) = (v_0 - gt)' = -g.$$

Вообще, если пространство e, проходимое телом в t единиц времени, выражается трехчленом 2-й степени:

$$e = at^2 + bt + c,$$

то

$$v = (at^2 + bt + c)' = 2at + b$$

и

$$w = (at^2 + bt + c)'' = (2at + b)' = 2a.$$

Глава шестая.

Функция третьей степени.

344. Производная от функций $y = x^3$ и $y = ax^3$. Главнейшие особенности этих функций мы уже рассмотрели ранее (ч. I, §§ 162, 163); тогда же мы построили графики этих функций (черт. 88). Найдем теперь их производные.

Положим, что переменному независимому числу мы дали какое-нибудь приращение h, начиная от произвольного его значения x. Тогда функция x^3 получит некоторое приращение k, равное:

$$k = (x + h)^3 - x^3 = 3hx^2 + 3h^2x + h^3.$$

Следовательно,

$$\frac{k}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2.$$

Если

$$h \to 0,\ \text{то}\ 3hx \to 0\ \text{и}\ h^2 \to 0;$$

поэтому:

$$(x^3)' = \text{пред.}\,\frac{k}{h} = 3x^2.$$

Производную от функции $y = ax^3$ мы легко найдем, основываясь на том, что (§ 332):

$$[af(x)]' = af'(x).$$

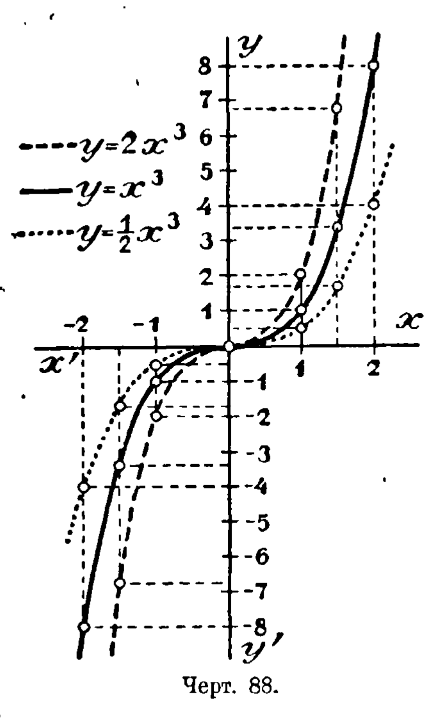
Следовательно,

$$(ax^3)' = a\,(x^3)' = a\cdot 3x^2 = 3ax^2.$$

Так:

$$(^1/_2x^3)' = 3\cdot{}^1/_2x^2 = {}^3/_2x^2;\quad (2ax^3)' = 3\cdot 2ax^2 = 6ax^2.$$

П р и м е н е н и е. Воспользуемся этими производными для определения направления выпуклости и вогнутости кривых: $y=x^3$, $y={}^1/_2\,x^3$ и $y=2x^3$ (черт. 88). Производные этих функций, равные $3x^2$, ${}^3/_2\,x^2$ и $6x^2$, очевидно, возрастают при возрастании положительного значения x и убывают при возрастании отрицательного значения x. Так, если дадим числу x возрастающие значения: $-2, -1, 0, 1, 2\ldots$, то производная $3x^2$ будет: 12, 3, 0, 3, 12..., т. е. она убывает, пока отрицательные значения числа x возрастают, и возрастает при возрастании положительных значений x. Вследствие этого, согласно признакам вогнутости кривых (§ 336), рассматриваемые кривые обращены вогнутостью вверх для положительных значений x и вниз, для отрицательных, что мы и видим на чертеже 88. При переходе через значение $x=0$ кривые меняют выпуклость на вогнутость и потому в начале координат они имеют так называемую т о ч к у п е р е г и б а.



Черт. 88.

345. Исследование полной функции третьей степени (на частных примерах).

Пример 1-й. $f(x) = {}^1/_3\,x^3 - x^2 - 3x + 5.$

Желательно и с с л е д о в а т ь эту функцию, т. е. решить следующие вопросы: 1) всегда ли функция в о з м о ж н а и получает ли она при данном значении x только о д н о з н а ч е н и е, или несколько; 2) при каких значениях x функция возрастает и при каких убывает; 3) найти *maximum* и *minimum* функции, если таковые существуют; 4) найти, если можно, нулевые значения функции (корни уравнения ${}^1/_3\,x^3 - x^2 - 3x + 5 = 0$) и 5) найти предельные значения функции при $x = \pm\infty$ и при $x = 0$.

Последний вопрос решается без помощи производной. Подставив вместо x число 0, мы прямо найдем, что тогда данная функция обращается в $+5$. С другой стороны, представив функцию в виде произведения:

$$f(x) = x^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right),$$

мы видим, что когда $x \to \pm\infty$, многочлен, стоящий внутри скобок, имеет пределом $^1/_3$, а множимое x^3 стремится к $+\infty$ если $x \to +\infty$, и к $-\infty$, если $x \to \infty$. Значит, $f(x) \to +\infty$ в первом случае и к $-\infty$ во втором.

Для решения вопроса о возрастании или убывании функции, надо составить ее производную. Так как производная от алгебраической суммы равна той же сумме производных от слагаемых, то:

$$(^1/_3x^3 - x^2 - 3x + 5)' = (^1/_3x^3)' - (x^2)' - (3x)' + (5)' = x^2 - 2x - 3.$$

Чтобы судить теперь, при каких значениях x данная функция возрастает или убывает, надо (§ 335) узнать, при каких значениях x производная положительна и при каких отрицательна, т. е., другими словами, надо решить 2 неравенства:

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \text{ и } x^2 - 2x - 3 < 0.$$

Для их решения мы предварительно разложим трехчлен $x^2 - 2x - 3$ на множители, для чего найдем корни этого трехчлена:

$$x^2 - 2x - 3 = 0;\; x = 1 \pm \sqrt{1^2 + 3} = 1 \pm 2;$$
$$x_1 = 3;\; x_2 = -1.$$

Теперь выполним разложение (ч. I, § 221):

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)\;[x - (-1)].$$

Следовательно, неравенства можно написать так:

$$(x - 3)\;[x - (-1)] \gtrless 0.$$

Произведение двух сомножителей тогда положительно, когда оба сомножителя положительны или когда оба отрицательны. Первое будет иметь место тогда, когда x больше большего из двух корней, т. е. когда $x > 3$ (тогда и подавно $x > -1$), второе тогда, когда x меньше меньшего корня, т. е. когда $x < -1$ (тогда и подавно $x < 3$). Значит, в этих двух случаях производная положительна. Если же один из двух сомножителей поло-

жительный, а другой отрицательный, то произведение отрицательно. Это может быть только тогда, когда значение x заключается между меньшим и большим корнем трехчлена, т. е. когда $3 > x > -1$.

Следовательно, при изменении x

от $-\infty$ до -1	от -1 до $+3$	от $+3$ до $+\infty$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$.

и поэтому (§ 335):

$f(x)$ возрастает	$f(x)$ убывает	$f(x)$ возрастает.

Отсюда видно, что при переходе x через -1 данная функция получает *maximum* а при переходе через $+3$ она получает *minimum*. Значения эти равны:

$$\textit{maximum}\ (\text{при } x = -1) = -\tfrac{1}{3} - 1 + 3 + 5 = 6\tfrac{2}{3};$$
$$\textit{minimum}\ (\text{при } x = +3) = 9 - 9 - 9 + 5 = -4.$$

Для более подробного представления о ходе изменения данной функции составим таблицу ее частных значений, например, такую:

x	$-\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	..	$+\infty$
y	$-\infty$	...	-4	$4\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$	5	$1\frac{1}{3}$	$-2\frac{1}{3}$	-4	$-1\frac{2}{3}$	$6\frac{2}{3}$	..	$+\infty$

Нанеся все эти значения на чертеж в виде отдельных точек и обведя эти точки непрерывною кривою, мы получим следующий график данной функции (черт. 89):

Кривая эта пересекает ось x-ов в трех точках, которых абсциссы лежат: одна между -2 и -3, другая между 1 и 2 и третья между 4 и 5. Значит кубичное уравнение

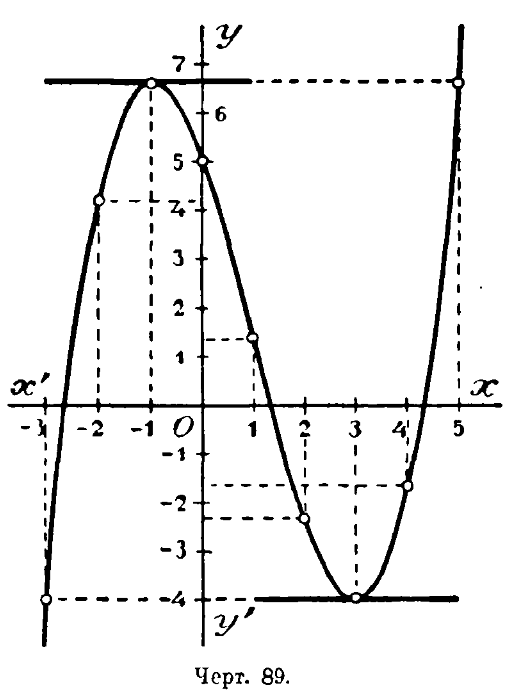
$$\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5 = 0$$

имеет три вещественных корня, лежащих между указанными границами (если выполнить чертеж на миллиметровой бумаге возможно точно, то корни уравнения можно найти с большею точностью).

Решим вопрос о вогнутости кривой. Для этого надо (§ 336) узнать при каких значениях x производная возрастает и при каких убывает. По виду нашей производной

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

это определить затруднительно. Но можно воспользоваться признаками возрастания или убывания функции (§ 335): найти производную от $f'(x)$ (иначе сказать, найти вторую производную от $f(x)$ и определить, когда она положительна и когда отрицательна. Производная от функции $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ будет $f''(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$. Очевидно, что при $x > 1$ она положительна, а при $x < 1$ отрицательна. Значит, при $x > 1$ производная $f'(x)$ возрастает, а при $x < 1$ она убывает. Следовательно, для всех значений $x > 1$ вогнутость кривой направлена вверх, а при всех значениях $x < 1$ она направлена вниз (таким образом, точка с абсциссой 1 есть точка перегиба). Это и подтверждается на нашем чертеже.



Черт. 89.

346. *Пример 2-й.* $f(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 13;$

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 48 = 3(x^2 - 8x + 16) = 3(x - 4)^2.$$

Так как произведение $3(x - 4)^2$ при всяком значении x есть число положительное (кроме значения $x = 4$, когда оно равно нулю), то данная функция при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ постоянно возрастает и потому она не имеет ни *maximum*, ни *minimum*. При $x = 4$ производная равна нулю; это значит, что касательная, проведенная через точку с абсциссой 4, параллельна оси x-ов. Но касательная может быть параллельной оси x-ов

только в трех случаях: когда кривая в точке касания или имеет *maximum*, или имеет *minimum*, или перегибается в этой точке. Наша кривая не имеет совсем ни *maximum*, ни *minimum*; значит, точка с абсциссой 4 есть точка перегиба.

Мы можем в этом убедиться еще иначе, если определим, для каких значений x кривая вогнута, и для каких — выпукла. Для этой цели можно было бы воспользоваться второю производною, но в данном примере благодаря особому виду первой производной: $f'(x) = 3(x-4)^2$ мы можем сразу определить, при каких значениях x эта производная возрастает и при каких — убывает. Очевидно, что при изменении x от 4 до $+\infty$ разность $x-4$ возрастает от 0 до $+\infty$; следовательно, при этом в о з р а с т а е т и $f'(x)$ от 0 до $+\infty$. При изменении x от $-\infty$ до 4, разность $x-4$ возрастает от $-\infty$ до 0; следовательно, квадрат этой разности $(x-4)^2$ при этом изменяется от $+\infty$ до 0; значит, $f'(x)$ у б ы в а е т от $+\infty$ до 0. Таким образом, для всех значений x, меньших 4, вогнутость кривой направлена вниз, а для всех значений x, больших 4, она направлена вверх, и потому точка с абсциссой 4 есть точка перегиба.

Для изображения графика данной функции составим предварительно таблицу частных значений:

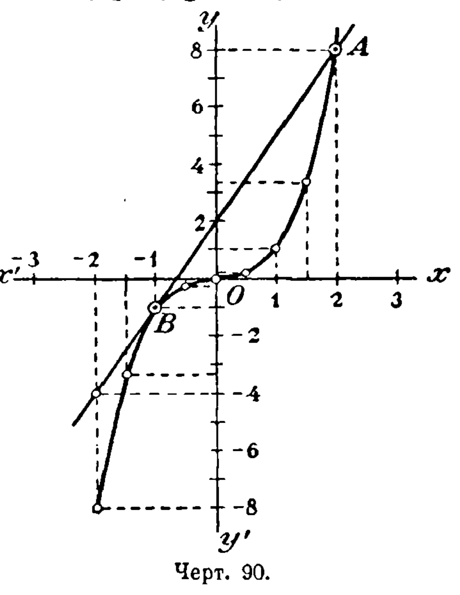
x	$-\infty$	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	...	-165	-74	-13	24	43	50	51	52	59	...	$+\infty$

Так как $f(x)$ выражается числами с очень большой абсолютной величиной, то для удобства чертежа можно уменьшить все их в 10 раз (конечно, от этого чертеж окажется сжатым в вертикальном направлении в 10 раз). Предлагаем читателям самим исполнить этот чертеж.

347. Графическое решение кубичного уравнения вида $x^3 + px + q = 0$. Графическим способом можно решить кубичное уравнение так же, как решается квадратное уравнение (ч. I, § 226), а именно: перенеся все члены уравнения в левую часть, строят график функции 3-й степени, стоящей в левой части уравнения, и затем на чертеже находят величины абсцисс точек, в которых этот график пересекается с осью x-ов. Так, из чертежа 89 видно, что уравнение $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 5 = 0$ имеет 3 корня, один отрицательный и 2 положительных, приблизительные вели-

чины которых можно найти на чертеже, изготовленном на миллиметровой бумаге.

Более удобен следующий способ, применяемый тогда, когда кубичное уравнение имеет вид: $x^3+px+q=0$ (в нем недостает члена с x^2)[1]). Пусть, например, требуется решить уравнение $x^3-3x-2=0$. Для этого, представив уравнение в виде $x^3=3x+2$, построим графики двух функций $y_1=x^3$ и $y_2=3x+2$ и затем определим абсциссы точек пересечения этих, двух графиков (черт. 90). График функции $y_1=x^3$ построим, как было указано ранее (ч. I, § 162). График второй функции: $y_2=$ $=3x+2$ есть прямая линия, которую мы можем построить по 2 точкам, например, таким: $x=0$, $y_2=2$ и $x=-2$, $y_2=$ $=-4$. Из чертежа видно, что эта прямая пересекается с кривой в точке A, имеющей абсциссу 2, и касается кривой в точке B, имеющей абсциссу -1. Эти абсциссы и будут корнями уравнения $x^3=3x-2$, так как при этих абсциссах ординаты кривой и прямой одни и те же.



Черт. 90.

Таким образом, если имеем заранее изготовленное лекало, выражающее параболу 3-й степени: $y=x^3$, то при его помощи мы легко можем находить на чертеже корни кубичного уравнения вида: $x^3+px+q=0$.

Глава седьмая.

Функция вида $y=\frac{a}{x}$.

348. Особенности этой функции. Функция $y=\frac{a}{x}$, в которой a постоянное число, выражает, как мы видели (ч. I, § 105), обратную пропорциональную зависимость между переменными числами

[1]) К такому виду можно привести уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$, если введем вспомогательное неизвестное y, связанное с x равенством: $x=y-\frac{a}{3}$.

и x. Когда мы говорили о графическом изображении этой зависимости (ч. I, § 112), мы тогда строили график этой функции, но только для положительных значений x. Теперь мы построим кривую, выражающую функцию $y = \frac{a}{x}$ не только для положительных, но и для отрицательных значений x, и кроме того рассмотрим некоторые особенности этой функции.

Возьмем случай, когда $a = 1$, т. е. когда функция имеет вид $y = \frac{1}{x}$. Очевидно, что при всяком значении x, отличном от нуля (как положительном, так и отрицательном), функция эта возможна и получает единственное значение, причем для положительных значений x она положительна, а для отрицательных значений x — отрицательна. При $x = 0$ функция $\frac{1}{x}$ перестает существовать (деление на 0 невозможно), но если число x не равно 0, а только приближается к 0, оставаясь положительным (например, если x переходит через значения: 0,1; 0,01; 0,001; и т. д.), то функция возрастает неограниченно (она делается равной 10, 100, 1000 и т. д.), иначе сказать, она стремится к $+\infty$. Если же x приближается к 0, оставаясь отрицательным (например, если x переходит через значения — 0,1; — 0,01; — 0,001; и т. д.), то функция $\frac{1}{x}$ стремится к $-\infty$ (переходя через значения — 10, — 100, — 1000 и т. д.). С другой стороны, если $x \to +\infty$ или если $x \to -\infty$, функция и в том и в другом случае стремится к 0. Таким образом,

если x возрастает от $-\infty$ до 0, то функция убыв. от 0 до $-\infty$	если x возрастает от 0 до $+\infty$, то функция убыв. от $+\infty$ до 0.

Таким образом, при переходе x через нулевое значение от отрицательных значений к положительным функция сразу переходит от $-\infty$ к $+\infty$. При всех же значениях x, неравных нулю, функция изменяется непрерывно, т. е. бесконечно малому приращению числа x соответствует и бесконечно малое приращение функции $y = \frac{1}{x}$. Действительно, если дадим числу x какое-нибудь приращение h, то функция получит приращение k, равное

$$\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+h)}{(x+h)x} = \frac{-h}{(x+h)x}.$$

Если $h \to 0$, то числитель полученной дроби стремится к нулю а знаменатель к x^2, т. е. к числу, не равному нулю (если только x не равен нулю); значит, правая часть полученного нами равенства (следовательно, и его левая часть) стремится к 0, когда $h \to 0$. Из этого следует, что при непрерывном изменении числа x, если только x не переходит через нулевое значение, функция $y = \frac{1}{x}$ изменяется тоже непрерывно; при переходе же x через нуль функция претерпевает разрыв непрерывности, переходя скачком от $-\infty$ к $+\infty$.

Заметив все это, построим теперь график нашей функции при помощи, например, таких таблиц частных значений:

x	0	...	$^1/_4$	$^1/_2$	1	2	3	4	...	$+\infty$
y	∞	..	4	2	1	$^1/_2$	$^1/_3$	$^1/_4$	...	0

x	0	...	$-^1/_4$	$-^1/_2$	-1	-2	-3	-4	...	$-\infty$
y	$-\infty$	...	-4	-2	-1	$-^1/_2$	$-^1/_3$	$-^1/_4$	...	0

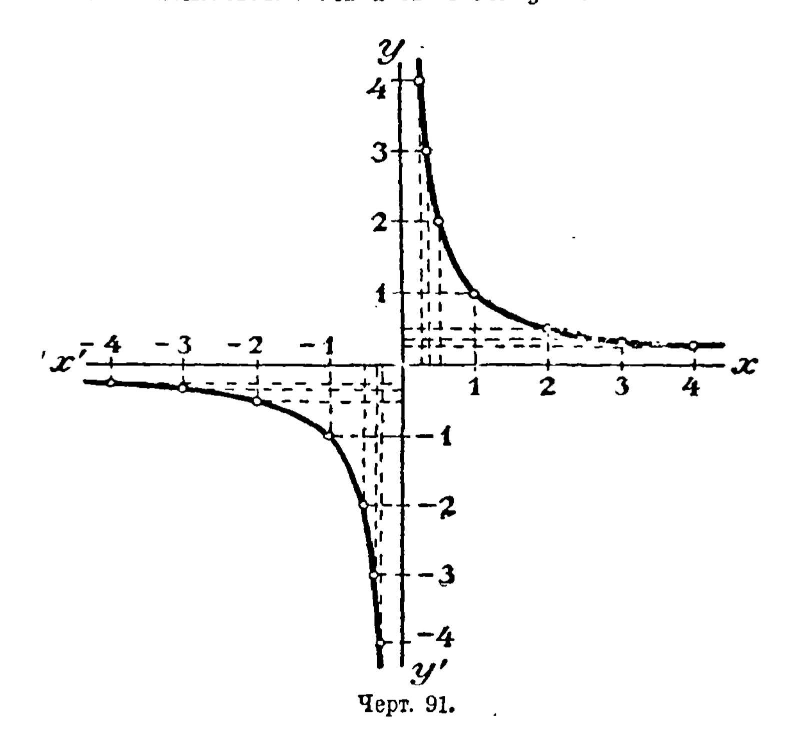
Обведя все точки непрерывной кривой, получим график (черт. 91), состоящий из двух ветвей: одна расположена в угле xOy, другая в угле $x'Oy'$. Обе эти ветви выражают одну и ту же функцию $y = \frac{1}{x}$, только первая ветвь выражает эту функцию для положительных значений x, а другая для отрицательных. Ветви эти образуют кривую, называемую гиперболой.

Рассмотрим главнейшие ее свойства.

1. Асимптоты. Ветвь кривой, расположенная в угле xOy. по мере возрастания x, все более и более приближается к полуоси Ox, но никогда ее не достигает вполне (так как дробь $\frac{1}{x}$ ни при каком значении x не равна нулю). Равным образом, ветвь кривой, лежащая в угле $x'Oy'$, по мере продолжения ее налево, неограниченно приближается к полуоси Ox', никогда ее не достигая. При неограниченном уменьшении положительного значения x ветвь кривой в угле xOy приближается все более и более к полуоси Oy, никогда ее однако не достигая (так как

дробь $\frac{1}{x}$ при $x=0$ перестает существовать); также при неограниченном уменьшении абсолютной величины отрицательного значения x ветвь кривой в угле $x'Oy'$ все более и более приближается к полуоси Oy', никогда ее не достигая.

Прямая, к которой кривая неограниченно приближается, никогда ее однако не достигая, называется асимптотой. Гипербола имеет 2 асимптоты: ось x-ов и ось y-ов.



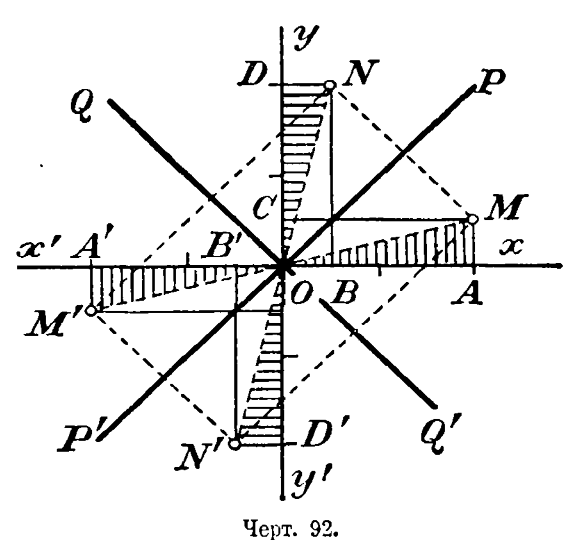
Черт. 91.

2. Оси симметрии. Центр симметрии. Уравнение $y=\frac{1}{x}$ можно написать так: $xy=1$. Из этого вида замечаем, что переменные x и y играют в уравнении одинаковую роль, т. е. если мы заменим y на x, а x на y, то уравнение от этого не изменится (такие уравнения называются симметричными). Поэтому если мы нашли, что такому уравнению удовлетворяет какая-нибудь пара значений: $x=a$ и $y=b$, то ему же удовлетворяет и другая пара значений: $x=b$, $y=a$, составленная из первой пары заменою x на y, и наоборот. Например, как видно

из таблицы значений, приведенной выше, на гиперболе лежат точки ($^1/_2$, 2) и (2, $^1/_2$). Уравнение $xy=1$ также не изменяется, если мы вместо x возьмем $-x$ и вместо y возьмем $-y$. Значит, если на гиперболе имеется точка (a, b), то на ней же (на другой ветви) должна находиться и точка ($-a$, $-b$). Например, из той же таблицы видно, что на гиперболе лежат точки ($^1/_2$, 2) и ($-^1/_2$, -2), или точки (3, $^1/_3$) и (-3, $-^1/_3$). Заметив это, возьмем такие 4 точки (черт. 92).

$$M(2, \ ^1/_2),\ N(^1/_2,\ 2),\ M'(-2,\ -^1/_2),\ N'(-^1/_2,\ -2).$$

Эти 4 точки лежат на гиперболе. Проведя прямые OM, ON, OM' и ON', мы получим четыре прямоугольные треугольника OMA, OND, $OM'A'$ и $ON'D'$ (покрытые на чертеже штрихами). Эти треугольники равны между собою (по равенству катетов). Значит, их гипотенузы равны, а также равны и острые углы при общей вершине O. Из равенства этих углов следует, что OM есть продолжение OM' и ON продолжение ON'. Проведя прямые MN, $M'N'$, $M'N$ и MN', мы получим равнобедренные треугольники попарно равные: $OMN=OM'N'$ и $OM'N=OMN'$.



Черт. 92.

Проведем еще биссектрисы PP' и QQ' прямых углов, образуемых осями координат. Из чертежа легко усмотреть, что эти биссектрисы делят пополам 4 угла указанных равнобедренных треугольников, лежащие при общей вершине O, и потому они делят пополам основания этих треугольников и перпендикулярны к ним. Отсюда следует, что точки M и N, а также и точки M' и N', симметрично расположены относительно прямой PP', а точки M и N', а также и точки N и M', симметрично лежат относительно прямой QQ'. Так как сказанное о 4 точках M, N, M' и N' может быть повторено о всяких других 4 точ-

ках, расположенных подобным же образом на гиперболе, то заключаем, что гипербола имеет 2 оси симметрии, именно биссектрисы прямых углов, образуемых осями координат.

Пересечение этих осей, т. е. точка O, служит центром симметрии, так как прямые MM' и NN' делятся этою точкою пополам.

Предположим теперь, что в функции $y=\frac{a}{x}$ число a не равно 1, а есть какое-нибудь положительное число, большее или меньшее 1. Тогда она выразится такою же гиперболою, как и функция $\frac{1}{x}$, только абсолютные величины ординат ее будут больше (если $a>1$), или меньше (если $a<1$) соответствующих ординат гиперболы $\frac{1}{x}$ в одном и том же отношении $a:1$ (ч. I, черт. 26, § 112)

Если a будет число отрицательное (например, $y=-\frac{1}{x}$), то положительным значениям x будут соответствовать отрицательные значения y, и наоборот. Значит, ветви гиперболы будут расположены в углах $x'Oy$ и xOy', свойства же кривых останутся те же самые, как и для положительных значений числа a.

349. Производная от функции $y=\frac{a}{x}$. Сначала найдем производную от функции $y=\frac{1}{x}$. Для этого дадим числу x какое-нибудь приращение h. Тогда y получит приращение k, равное

$$k=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}=-\frac{h}{(x+h)x}.$$

Следовательно,

$$\frac{k}{h}=-\frac{1}{(x+h)x}$$

и потому

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\text{пред.}\left(\frac{k}{h}\right)_{h\to 0}=-\frac{1}{x^2},$$

так как

$$\text{пред.}\Big[(x+h)x\Big]_{h\to 0}=x^2.$$

Для функции $y=\frac{a}{x}$ производная будет (§ 332):

$$\left(\frac{a}{x}\right)'=\left(a\cdot\frac{1}{x}\right)'=a\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{a}{x^2}.$$

Применения. Воспользуемся производной для суждения о возрастании и убывании функции, а также и вогнутости и выпуклости кривой.

Производная от функции $y = \frac{1}{x}$, равная $-\frac{1}{x^2}$ при всяком значении x, к к положительном, так и отрицательном, всегда отрицательна (при $x = 0$ она не существует). Поэтому (§ 335) при возрастании x от $-\infty$ до $+\infty$ функция $\frac{1}{x}$ постоянно убывает (при $x = 0$, она как мы видели, претерпевает разрыв непрерывности). Значит, функция не имеет ни maximum ни minimum.

При возрастании числа x от $-\infty$ до 0, число x^2 убывает; значит, дробь $+\frac{1}{x^2}$ при этом возрастает, а дробь $-\frac{1}{x^2}$ убывает. Это показывает (§ 336), что в угле $x'Oy'$ вогнутость гиперболы направлена вниз. При возрастании x от 0 до $+\infty$, число x^2 возрастает, дробь $+\frac{1}{x^2}$ убывает, а дробь $-\frac{1}{x^2}$ возрастает. Это означает, что в угле xOy вогнутость гиперболы направлена вверх. Это и подтверждается чертежом 91.

ОТДЕЛ ШЕСТНАДЦАТЫЙ.

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.

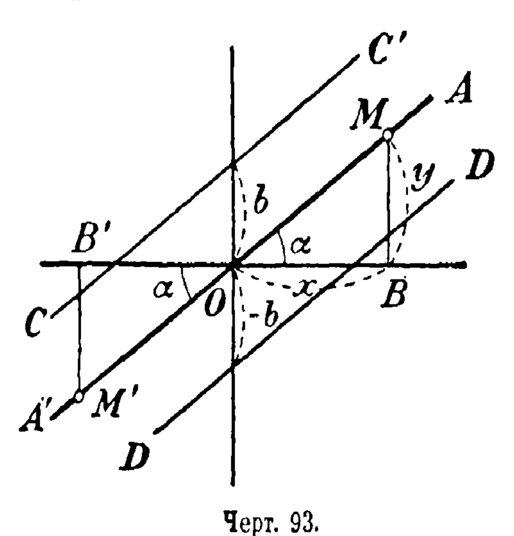
Глава первая.

Прямая линия.

350. Уравнение прямой. Мы знаем (ч. I, § 115), что уравнение 1-й степени с 2-мя неизвестными вида

$$y=ax+b$$

выражается помощью координатных осей в виде прямой линии, которая образует с положительным направлением оси x-ов угол α, определяемый равенством: $\operatorname{tg}\alpha=a$, и отсекает от оси y-ов отрезок, равный b. Так как к такому виду может быть приведено всякое уравнение 1-й степени с 2-мя неизвестными x и y, то такое уравнение выражается при помощи координатных осей в виде прямой линии (почему оно и называется линейным уравнением).



Черт. 93.

Покажем теперь, что, обратно, *всякая прямая линия может быть выражена уравнением 1-й степени с двумя неизвестными x и y.*

Сначала допустим, что прямая AA' (черт. 93) проходит через начало координат O, образуя с Ox острый угол α. Возьмем на

этой прямой произвольную точку M, абсцисса который есть $x = OB$ и ордината $y = MB$. Из треугольника OMB видно, что $y = x \operatorname{tg} \alpha$, или $y = ax$, если $\operatorname{tg} \alpha$ обозначим a. Выведенное нами уравнение $y = ax$ верно не только для точек полупрямой OA, но и для точек полупрямой OA'. Возьмем, напр., точку M', которой координаты будут: $x = -OB'$, $y = -M'B'$. Из тр-ка $OB'M'$ находим: $M'B' = B'O \operatorname{tg} \alpha$, т. е. $-y = -x \operatorname{tg} \alpha$, или $y = x \operatorname{tg} \alpha$. Таким образом, уравнение $y = ax$ верно для всякой точки прямой AA'.

Теперь допустим, что прямая AA' проходит через начало координат, но образует с Ox не острый угол, а тупой α (черт. 94). Если M есть какая-нибудь точка этой прямой, то ее абсцисса $x = -OB$ и ордината $y = MB$, и мы из тр-ка OMB находим:

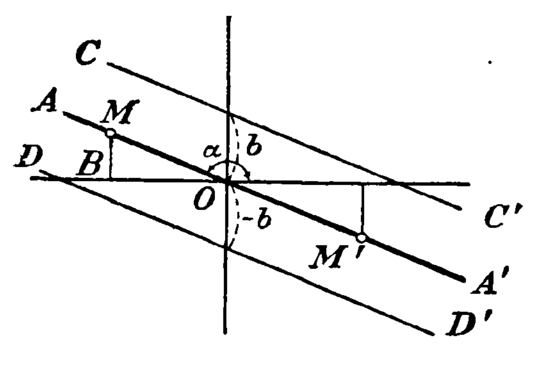
$$MB = OB \operatorname{tg} MOB,$$

т. е.

$$y = -x \operatorname{tg} MOB.$$

Но $\operatorname{tg} MOB = \operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$; значит, $y = -x(-\operatorname{tg} \alpha) = x \operatorname{tg} \alpha = ax$, если попрежнему обозначим $\operatorname{tg} \alpha$ через a. Подобное же уравнение получим и для любой точки M', расположенной на OA'.

Наконец, допустим, что дана прямая CC' или DD' (черт. 93 и 94), не проходящая через O, а отсекающая от оси y-ов отрезок, равный b (или $-b$). Тогда, проведя через точку O вспомогательную прямую $AA' \parallel CC'$ (или $\parallel DD'$), мы получим для этой прямой уравнение $y = ax$, где $a = \operatorname{tg} \alpha$. Но очевидно, что при одной и той же абсциссе x ординаты точек прямой CC' больше ординат точек прямой AA' на b, а прямой DD' меньше на b; значит, уравнение прямой CC' будет $y = ax + b$, а прямой DD' $y = ax - b$, где a есть попрежнему тангенс угла, образованного прямой с положительным направлением оси x-ов.



Черт. 94.

Частные случаи. 1) Если $a = 0$, т. е. если данная прямая параллельна оси x-ов, то уравнение будет: $y = b$. Если

она при этом сливается с осью x-ов, то уравнение окажется: $y=0$.

2) Если данная прямая параллельна оси y-ов и отсекает от оси x-ов отрезок k, то уравнение такой прямой будет: $x=k$ (ордината, как не входящая в уравнение, остается произвольной).

351. Уравнение прямой, проходящей через данную точку. Если прямая $y=ax+b$ проходит через точку (x_1, y_1), то мы должны иметь равенство

$$y_1=ax_1+b.$$

Вычтя почленно это равенство из уравнения $y=ax+b$, получим:

$$y-y_1=a(x-x_1).$$

Что прямая, определяемая этим уравнением, действительно проходит через точку (x_1, y_1), видно из уравнения непосредственно: подставив вместо x и y соответственно y_1 и x_1, получим тождество: $0=0$.

Угловой коэффициент a остается неопределенным, так как через одну точку может проходить бесчисленное множество прямых.

Примеры. Уравнение прямой, проходящей через:

точку	(2, 3)	будет:	$y-3=a(x-2)$;
„	(—2, 3)	„	$y-3=a(x+2)$;
„	(—2, —3)	„	$y+3=a(x+2)$;
„	(0, 3)	„	$y-3=ax$;
„	(0, 0)	„	$y=ax$.

352. Уравнение прямой, проходящей через 2 данные точки. Положим, что прямая:

$$y-y_1=a(x-x_1), \qquad (1)$$

проходящая через точку (x_1, y_1), проходит еще через другую точку (x_2, y_2). Тогда координаты этой другой точки должны удовлетворять уравнению прямой, и следовательно:

$$y_2-y_1=a(x_2-x_1),$$

откуда находим:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Мы нашли таким образом угловой коэффициент прямой, проходящей через 2 данные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Теперь уравнение (1) можно написать так:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

что можно изобразить в таком удобном для запоминания виде:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Что прямая, удовлетворяющая этому уравнению, проходит через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), видно из уравнения непосредственно; подставив вместо x и y соответственно x_1, y_1 или x_2, y_2, получим тождества:

$$\frac{y_1-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_1-x_1}{x_2-x_1}, \text{ т. е. } 0=0$$

$$\frac{y_2-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_2-x_1}{x_2-x_1}, \text{ т. е. } 1=1$$

Пример. Уравнение прямой, проходящей через точки A (2, 3) и B (— 2, 1), будет:

$$\frac{y-3}{1-3}=\frac{x-2}{-2-2},$$

т. е.

$$\frac{y-3}{-2}=\frac{x-2}{-4}, \text{ или } \frac{y-3}{2}=\frac{x-2}{4},$$

что после упрощения дает: $x-2y=-4$.

Глава вторая.

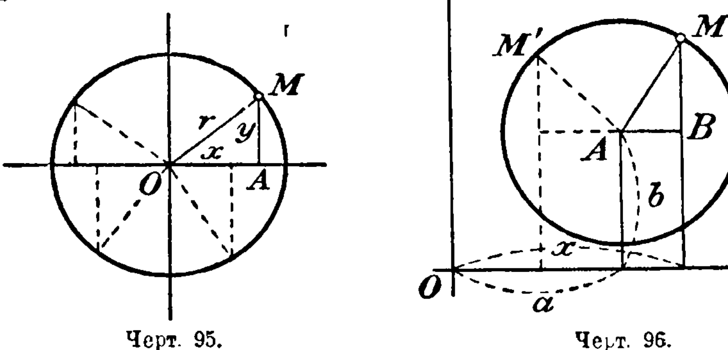
Окружность и эллипс.

353. Уравнение окружности. Пусть центр окружности радиуса r совпадает с началом координат O (черт. 95). Возьмем на окружности какую-нибудь точку M, координаты которой будут $x=OA$ и $y=MA$. Из прямоугольного тр-ка OMA находим:

$$x^2+y^2=r^2.$$

Уравнение это остается верным не только для координат точек, лежащих на окружности в угле xOy, но и для координат точек окружности, лежащих в других углах. Действительно, в каком бы угле мы ни взяли точку окружности, координаты ее всегда будут катетами пряумоугольного треугольника, у которого гипотенуза есть r; только катеты эти иногда приходится брать со знаком $+$, иногда со знаком $-$. Но так как $(+x)^2=(-x)^2$ и

$(+y)^2=(-y)^2$, то уравнение $x^2+y^2=r^2$ останется в силе для любой точки окружности, и потому его можно назвать **уравнением окружности**, у которой центр совпадает с началом координат.



Черт. 95. Черт. 96.

Если центр окружности лежит (черт. 96) не в начале координат, а в какой-нибудь точке A (a, b), то из тр-ка AMB находим (B вершина прямого угла): $AB^2+MB^2=AM^2$. Но $AB=$ $=x-a$, $MB=y-b$ и $AM=r$; следовательно,

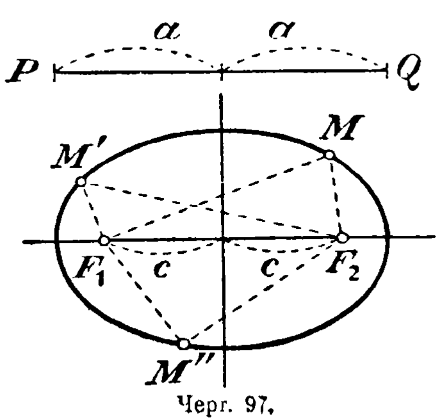
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Легко проверить, что уравнение это применимо для всякой точки окружности. Напр., для точки M' получим:

$$(a-x)^2+(y-b)^2=r^2,$$

что тождественно уравнению, выведенному для точки M.

354. Определение эллипса. Эллипсом называется *геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний которых от двух данных точек этой плоскости есть величина постоянная.*



Черт. 97.

Пусть, напр., даны 2 точки F_1 и F_2 (черт. 97) и какой-нибудь отрезок прямой PQ. Если отыщем такие точки M, M', M''..., которые удовлетворяют требованию $MF_1+MF_2=M'F_1+M'F_2=$ $=M''F_1+M''F_2=\ldots=PQ$,

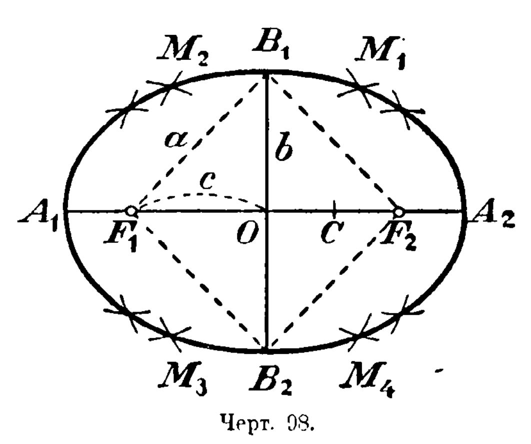
то эти точки принадлежат эллипсу. Конечно, существование подобных точек возможно только тогда, когда $PQ > F_1F_2$.

355. Построение эллипса непрерывным движением. Эллипс можно начертить непрерывным движением карандаша. Для этого возьмем нить, длина которой равна PQ (черт. 97) и укрепим ее концы в точках F_1 и F_2. Затем, натянув нить острием карандаша, станем двигать карандашом по бумаге, наблюдая, чтобы нить всегда была в натяжении. При движении карандаш опишет замкнутую кривую, все точки которой находятся на таких расстояниях от F_1 и F_2, что их сумма равна длине нити, т. е. отрезку PQ.

Длина данного отреза PQ обозначается обыкновенно $2a$, а расстояние между точками F_1 и F_2 обозначается $2c$. Точки эти называется фокусами, а прямые MF_1 и MF_2, соединяющие какую-нибудь точку M эллипса с фокусами, называется радиусами-векторами.

Точка O, означающая середину отрезка F_1F_2, называется центром эллипса. Всякая хорда эллипса, проходящая через центр, называется диаметром.

Из тр-ка F_1MF_2 видно, что $MF_1 + MF_2 > F_1F_2$, т. е. $2a > 2c$ и следовательно, $a > c$.



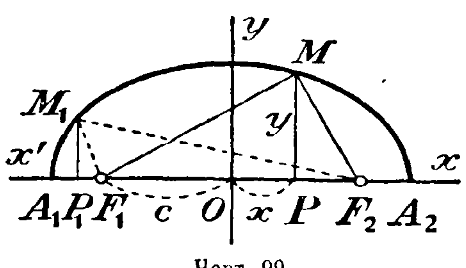
Черт. 98.

356. Построение эллипса по точкам (черт. 98). Отложим $OA_1 = OA_2 = a$. Полученные точки A_1 и A_2 принадлежат эллипсу, так как $A_1F_1 = A_2F_2$ и, следовательно, $A_1F_1 + A_1F_2 = A_2F_2 + A_1F_2 = 2a$ и также $A_2F_2 + A_2F_1 = A_1F_1 + A_2F_1 = 2a$. Дав теперь циркулю расстворение, равное $A_1O = a$, опишем этим расстворением из центра F_1 и затем из центра F_2 две дуги, которые пересекутся в точках B_1 и B_2. Эти точки тоже принадлежат эллипсу, так как $B_1F_1 + B_1F_2 = 2a$ и $B_2F_1 + B_2F_2 = 2a$ (прямая, проходящая через B_1 и B_2, перпендикулярна к A_1A_2 и делит A_1A_2 пополам в точке O). Четыре точки A_1, A_2 B_1 и B_2 называются вершинами эллипса. Отрезки прямых A_1A_2 и B_1B_2 называются осями эллипса, причем A_1A_2 есть большая ось, а B_1B_2—

малая ось. Длина малой оси обозначается $2b$. Из тр-ка F_1B_1O, в котором $F_1B_1=a$, $OB_1=b$ и $F_1O=c$, видно, что $b^2=a^2-c^2$.

Кроме четырех вершин можно построить сколько угодно других точек эллипса таким образом. Возьмем на отрезке F_1F_2 какую-нибудь точку C и, дав циркулю расстворение, равное A_1C, описываем этим расстворением 4 небольшие дуги: две из центра F_1 (одну выше прямой A_1A_2, другую ниже ее, обе направо от B_1B_2) и две из центра F_2 (одну выше A_1A_2, другую ниже, обе налево от B_1B_2). Затем дадим циркулю расстворение, равное CA_2, и этим расстворением описываем также 4 небольшие дуги: две из центра F_2 и две из центра F_1. Если взятая точка C расположена между F_1 и F_2, то дуги, описанные из центра F_1, пересекутся с дугами, описанными из центра F_2, так как расстояние между центрами F_1 и F_2 ($=2c$) меньше суммы радиусов дуг, которая равна A_1A_2 ($=2a$), но больше их разности ($=2OC$)[1]. В пересечении получим четыре точки: M_1, M_2, M_3, M_4, принадлежащие эллипсу. Взяв вместо C другую точку между F_1 и F_2, мы подобным же построением получим еще 4 точки, и т. д. Когда, таким образом, получится довольно много точек, их все можно обвести непрерывной кривой, которая и будет эллипс.

Форма эллипса зависит от величины отношения $\frac{c}{a}$, называемого **эксцентриситетом**. Отношение это изменяется от 0 (когда $c=0$) до 1 (когда $c=a$). Когда $c=0$ и, значит, оба фокуса совпадают с центром, тогда эллипс обращается в окружность радиуса a, если же $c=a$, то фокус F_1 совпадает с A_1 и фокус F_2 с A_2; в этом случае эллипс обращается в отрезок A_1A_2. Значит, чем ближе эксцентриситет к 0, тем более эллипс расширяется в вертикальном направлении, приближаясь к кругу, а чем ближе эксцентриситет к 1, тем более эллипс сжат в вертикальном направлении, приближаясь к прямой A_1A_2.



Черт. 99.

357. Уравнение эллипса. Предположим, что (черт. 99) за ось x-ов взята продолженная большая ось эллипса, а за ось y-ов продолженная малая его ось.

[1]) Так как $A_1C=a+OC$ и $A_2C=a-OC$.

Возьмем на эллипсе какую-нибудь точку M (x, y) и проведем радиусы-векторы MF_1 и MF_2. Опустив $MP \perp A_1A_2$, мы получим координаты точки M: абцисса $x = OP$, ордината $y = MP$. Из треугольников F_1MP и PMF_2 находим:

$$MF_1^2 = MP^2 + F_1P^2 = y^2 + (c + x)^2,$$
$$MF_2^2 = MP^2 + PF_2^2 = y^2 + (c - x)^2,$$

и следовательно,

$$\sqrt{y^2 + (c + x)^2} + \sqrt{y^2 + (c - x)^2} = 2a.$$

Можно проверить, что это уравнение верно для всякой точки верхней половины эллипса. Возьмем, например, еще точку M_1, расположенную так, что основание P_1 перпендикуляра M_1P_1 лежит налево от F'_1. Для этой точки находим:

$$M_1F_1^2 = M_1P_1^2 + P_1F_1^2 = M_1P_1^2 + (P_1O - F_1O)^2 = y^2 + (-x - c)^2,$$
$$M_1F_2^2 = M_1P_1^2 + P_1F_2^2 = M_1P_1^2 + (P_1O + F_2O)^2 = y^2 + (-x + c)^2,$$

и следовательно,

$$\sqrt{y^2 + (-x - c)^2} + \sqrt{y^2 + (-x + c)^2} = 2a.$$

Так как $(-x - c)^2 = (x + c)^2$ и $(-x + c)^2 = (c - x)^2$, то это уравнение тождественно с выведенным ранее для точки M.

Подобным же образом можно убедиться, что уравнение остается верным и тогда, когда основание перпендикуляра падает направо от F_2 или между F_1 и O.

Если же уравнение остается верным для всех точек верхней половины эллипса, то оно должно быть верным и для всех точек нижней его половины, так как эти точки отличаются от соответственных точек верхней половины только тем, что ординаты нижных точек отрицательны, а верхних положительны; но это отличие не может повлиять на уравнение, так как в него входят только квадраты ординат.

Теперь упростим выведенное уравнение, освободив его, прежде всего, от радикалов. Перенеся второй радикал направо, возвысим обе части уравнения в квадрат:

$$y^2 + (c + x)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} + y^2 + (c - x)^2.$$

Значит:

$$4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} = 4a^2 + (c - x)^2 - (c + x)^2,$$

т. е.

$$4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} = 4a^2 - 4cx,$$

или

$$a\sqrt{y^2+(c-x)^2}=a^2-cx.$$

Вторым возвышением в квадрат находим:

$$a^2y^2+a^2c^2-2a^2cx+a^2x^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$
$$a^2y^2+a^2x^2-c^2x^2=a^4-a^2c^2,$$
$$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2).$$

Но $a^2-c^2=b^2$; поэтому уравнение будет:

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Разделив все члены на a^2b^2, мы придадим уравнению эллипса такой удобный для запоминания вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

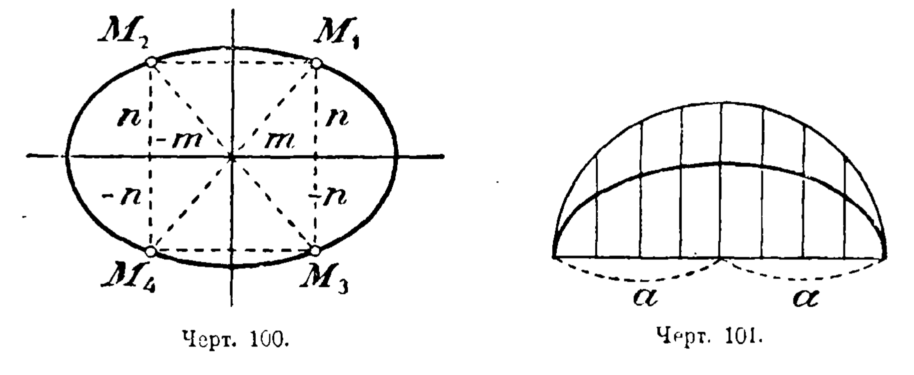
Таково уравнение эллипса в том случае, когда его большая ось лежит на оси x-ов, а малая на оси y-ов.

Если центр эллипса лежит не в начале координат, а в какой-нибудь точке (m, n), причем большая ось параллельна оси x-ов, то (как не трудно убедиться) уравнение будет такое:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1.$$

Если же большая ось параллельна оси y-ов, то в уравнениях надо заменить x на y, и наоборот, т. е. тогда уравнения будут:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \text{ и } \frac{(y-m)^2}{a^2}+\frac{(x-n)^2}{b^2}=1.$$



Черт. 100. Черт. 101.

358. Следствия. 1) Из уравнения видно, что если на эллипсе (черт. 100) есть точка M_1 (m, n), то на нем должны быть и точки

$M_2\ (-m, n)$, $M_3\ (m, -n)$ и $M_4\ (-m, -n)$. Из этого следует, что оси эллипса служат для него **осями симметрии** и пересечение осей есть **центр симметрии**, т.-е. такая точка, которая делит пополам всякий диаметр.

2) Построим (черт. 101) на большой оси эллипса, как на диаметре, окружность, и сравним уравнение этой окружности с уравнением эллипса:

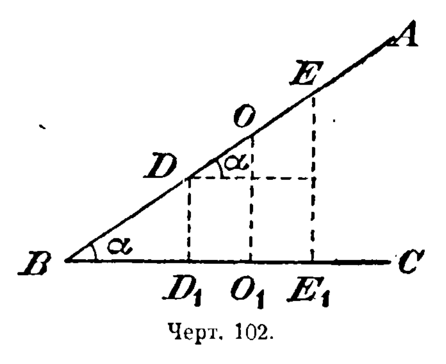
$$\text{окружность} \ldots x^2 + y^2 = a^2;$$
$$\text{эллипс} \ldots \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Из уравнений находим:

$$\text{для окружности} \ldots y = \sqrt{a^2 - x^2};$$
$$\text{для эллипса} \ldots y = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Таким образом, при одной и той же абсциссе x ордината эллипса короче ординаты круга в отношении $b : a$. Если, напр., $b : a = {}^1/_2$, то, разделив ординаты круга пополам, мы получим точки эллипса (это дает нам другой способ построения эллипса по точкам).

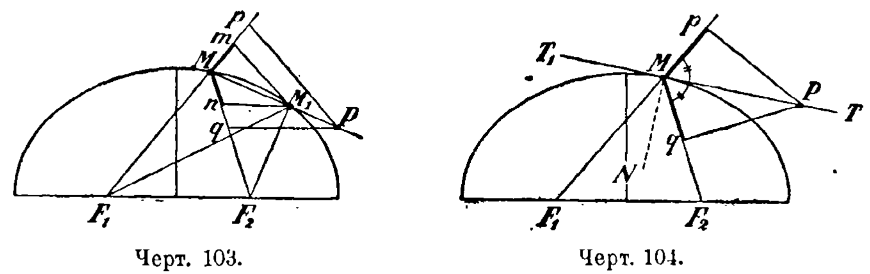
359. Эллипс как проекция круга. Вообразим 2 плоскости, образующие некоторый двугранный угол α (на чертеже 102 мы изобразили сечение ABC этого угла плоскостью чертежа, перпендикулярною к ребру угла α). Пусть на плоскости AB из точки O как центра описан круг, и DE есть его диаметр, перпендикулярный к ребру угла α. Зададимся вопросом, какова будет ортогональная (прямоугольная) проекция этого круга на плоскости BC. Примем на плоскости AB за ось x-ов диаметр круга, параллельный углу ребра a, а за ось y-ов — диаметр, ему перпендикулярный Тогда абсциссы всех точек окружности проектируются на плоскости BC в натуральную величину (так же, как и диаметр, параллельный ребру); ординаты же в проекциях окажутся меньше в одном и том же отношении, равном $\cos\alpha$



Черт. 102.

(напр., проекция $D_1 E_1$ диаметра DE будет $DE \cos \alpha$). Значит **проекция окружности есть эллипс.**

360. Свойство касательной. Возьмем на эллипсе две произвольные точки M и M_1 (черт. 103), проведем через них секущую и радиусы-векторы к каждой из них. Продолжив F_1M, отложим $F_1m = F_1M_1$; затем на F_2M отложим $F_2n = F_2M_1$. Получившиеся через это отрезки Mm и Mn (обведенные на чертеже жирно) должны быть равны, так как они показывают, насколько, при переходе от точки M_1 к точке M, радиус-вектор F_1M_1 уменьшается, а радиус-вектор F_2M_1 увеличивается; но так как сумма радиусов-векторов для обеих точек одна и та же, то увеличение одного из них равняется уменьшению



Черт. 103. Черт. 104.

другого. Возьмем еще на секущей произвольную точку P и проведем $Pp \parallel M_1m$ и $Pq \parallel M_1n$. Заметив, что четыреугольники $PpMq$ и M_1mMn подобны (они состоят из подобных и сходственно расположенных треугольников), мы находим, что $Mp = Mq$. Теперь вообразим, что точка M_1 неограниченно приближается к M. Посмотрим, как будет изменяться тогда положение начерченных нами прямых. Секущая MP будет все более и более приближаться к некоторому предельному положению, именно к касательной к эллипсу в точке M; прямые M_1m и M_1n, уменьшаясь по длине, будут все более и более приближаться к перпендикулярности к радиусам-векторам F_1M и F_2M, так как углы F_1 и F_2 при вершинах равнобедренных треугольников F_1M_1m и F_2M_1n стремятся к 0° и, следовательно, каждый из углов при основаниях M_1m и M_1n этих треугольников стремится к 90°. Прямые Pq и Pp, будучи параллельными прямым M_1n и M_1m, стремятся тоже к перпендикулярности к F_2M к F_1M. В то же время отрезки Pq и Pp остаются всегда равными между собою.

Мы видим таким образом, что когда секущая M_1M обратится в касательную MT (черт. 104), то прямые Pq и Pp сделаются перпендикулярами к MF_2 и к Mp,) причем отрезки Mq и Mp

останутся равными. Но тогда тр-к PMp будет равен тр-ку PMq и, следовательно, $\angle PMp$ сделается равным $\angle PMq$. Таким образом: касательная к эллипсу есть биссектриса угла, смежного с углом, образованным радиусами-векторами, проведенными в точку касания.

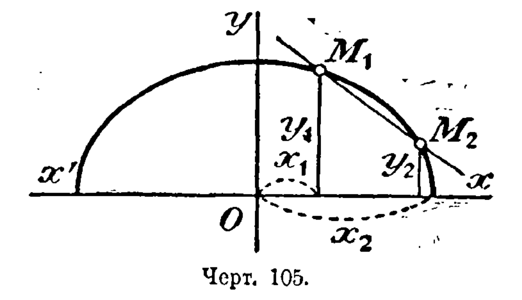
Из этого свойства касательной видно, что прямая MN (черт. 104), перпендикулярная к касательной в точке касания (такая прямая называется нормалью к кривой в точке касания), делит пополам угол F_1MF_2, образованный радиусами-векторами, проведенными из точки касания. Действительно, так как $\angle pMT = \angle T_1MF_1$ (вертикальные) и $\angle pMT = \angle TMF_2$ (по доказанному), то углы T_1MF_1 и TMF_2 равны; но тогда и дополнения их до 90°, т. е. углы F_1MN и NMF_2, также равны. Поэтому если в одном из фокусов поместим звучащее (или светящееся) тело, то лучи (звука или света), отразившись от вогнутой стороны эллипса (по закону: угол падения равен углу отражения), соберутся в другом фокусе (этим объясняются известные акустические свойства эллипсоидальных помещений).

361. Уравнение касательной. Пусть M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2) будут две какие-нибудь точки эллипса (черт. 105). Уравнение секущей, проходящей через эти две точки, будет (§ 352):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

что можно написать и так:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$



Черт. 105.

Так как точки M_1 и M_2 лежат на эллипсе, то координаты их удовлетворяют уравнению эллипса:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1, \quad \text{т. е.} \quad b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2,$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1, \quad „ \quad b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2.$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим:

$$b^2(x_1^2-x_2^2)+a^2(y_1^2-y_2^2)=0,$$

т. е.

$$b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+a^2(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0.$$

Отсюда находим:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-b^2 (x_1 + x_2)}{a^2 (y_1 + y_2)}.$$

Теперь уравнение секущей будет:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{b^2 (x_1 + x_2)}{a^2 (y_1 + y_2)}.$$

Вообразим теперь, что точка M_2 приближается все более и более к M_1 и, наконец, сливается с M_1. Тогда секущая обратится в касательную к эллипсу в точке M_1, а уравнение секущей сделается уравнением касательной Значит, уравнение касательной получится, если в уравнении секущей положим $x_2 = x_1$ и $y_2 = y_1$:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{b^2 \cdot 2x_1}{a^2 \cdot 2y_1} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1},$$

т. е.

$$a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = -(b^2 x_1 x - b^2 x_1^2),$$

или

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2.$$

Правая часть этого уравнения равна 1 (согласно уравнению эллипса); значит:

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = 1.$$

Таково уравнение касательной, проведенной через точку эллипса, имеющую координаты x_1 и x_2. Этому уравнению удобнее придать другой вид, разделив все его члены на $a^2 b^2$:

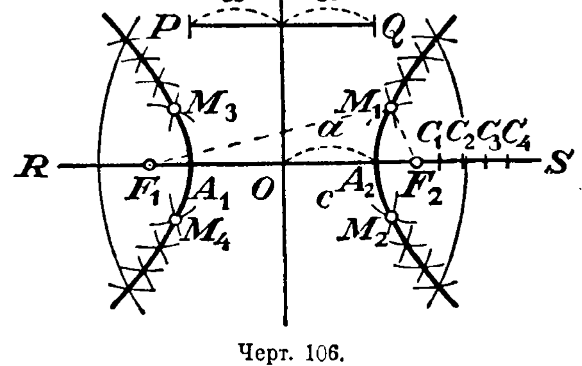
$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Глава третья.

Гипербола.

362. Определение и построение. Мы уже раньше встречались с кривой, называемой гиперболой, а именно тогда, когда говорили о графике функции: $y = \frac{1}{x}$ (§ 348). Теперь мы рассмотрим эту кривую в более общем виде и прежде всего определим ее, как *геометрическое место таких точек на плоскости, разность расстояний которых от двух данных точек этой плоскости есть величина постоянная.*

Как и для эллипса, две точки (F_1 и F_2, черт. 106), от которых считаются расстояния, называются **фокусами**, а прямые, соединяющие эти точки с точками гиперболы, называются **радиусами-векторами**. Данная разность (PQ) двух радиусов-векторов, исходящих из какой-нибудь точки гиперболы, обозначается $2a$, а расстояние между фокусами $2c$. Для возможности существования гиперболы необходимо, чтобы a было меньше c, так как если M_1 есть одна из точек гиперболы, то из треугольника $F_1M_1F_2$ видно, что $F_1M_1 - M_1F_2 < F_1F_2$, т. е. $2a < 2c$ и потому $a < c$.



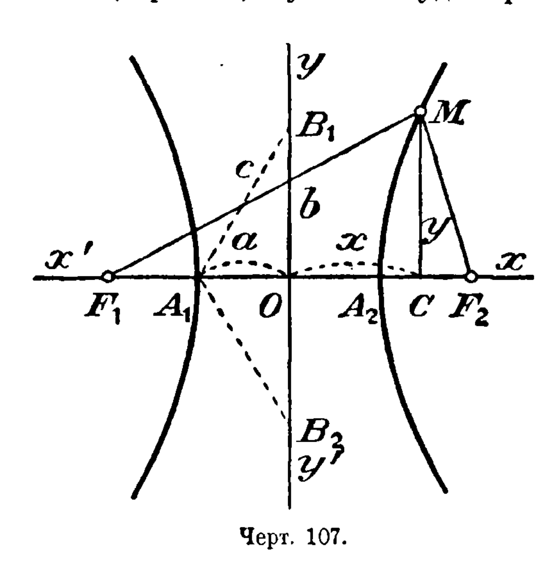
Черт. 106.

Гиперболу всего удобнее строить по точкам таким образом. Пусть фокусы F_1 и F_2 расположены на прямой RS. Разделим расстояние F_1F_2 пополам в точке O (она называется **центром** гиперболы) и отложим $OA_1 = OA_2 = a$. Полученные точки A_1 и A_2 принадлежат гиперболе, так как $F_1A_1 = F_2A_2$ и потому $A_1F_2 - A_1F_1 = A_1F_2 - A_2F_2 = A_1A_2 = 2a$; подобно этому и $A_2F_1 - A_2F_2 = 2a$. Эти две точки называются **вершинами**, а отрезок $A_1A_2 = 2a$ называется **осью** гиперболы.

Возьмем теперь на продолжении F_1F_2 какую-нибудь точку C_1 (направо от F_2, или налево от F_1 — все равно). Дадим циркулю расстворение, равное A_1C_1, и этим расстворением опишем две дуги: одну из центра F_1 и другую из центра F_2. Затем, дав циркулю расстворение, равное A_2C_1, из центра F_2 засечем первую дугу в точках M_1 и M_2, из центра F_1 засечем вторую дугу в точках M_3 и M_4. Полученные четыре точки принадлежат гиперболе, так как для каждой из них разность радиусов-векторов равна $A_1A_2 = 2a$. Беря затем другие произвольные точки C_2, C_3... (на продолжение F_1F_2), мы таким же путем построим для каждой из них 4 новых точки. Когда таких точек наберется достаточно много, мы можем обвести непрерывною кривою все те, которые лежат в правой половине чертежа, и все те, которые лежать в левой, тогда получим 2 **ветви** одной и той же кривой — гиперболы.

Большая или меньшая изогнутость гиперболы зависит от величины отношения $\frac{c}{a}$, которое (как и для эллипса) называется эксцентриситетом.

363. Уравнение гиперболы. Предположим, что ось A_1A_2 гиперболы лежит на оси x-ов и центр O совпадает с началом координат (черт. 107). Пусть M будет произвольная точка гиперболы, имеющая координаты: $x = OC$ и $y = MC$. Из треугольников F_1MC и F_2MC находим:



Черт. 107.

$$MF_1^2 = MC^2 + F_1C^2 = $$
$$= y^2 + (c + x)^2,$$
$$MF_2^2 = MC^2 + F_2C^2 = $$
$$= y^2 + (c - x)^2.$$

Следовательно,

$$\sqrt{y^2 + (c + x)^2} -$$
$$- \sqrt{y^2 + (c - x)^2} = 2a.$$

Так же, как это мы делали для эллипса (§ 357), можно проверить, что это уравнение верно для всякой точки гиперболы, как взятой на правой ветви, так и на левой, и расположенной как выше оси x-ов, так и ниже ее (предоставляем самим читателям сделать такую проверку).

Упростим теперь выведенное уравнение совершенно так же, как мы это делали с уравнением эллипса, а именно: перенеся второй радикал в правую часть, возвысим обе части уравнения в квадрат:

$$y^2 + (c + x)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} + y^2 + (c - x)^2,$$

значит:

$$-4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} = 4a^2 + (c - x)^2 - (c + x)^2,$$

т. е.

$$-a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} = a^2 - cx.$$

После вторичного возвышения в квадрат получим:

$$a^2y^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$
$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)\,x^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2\,(a^2 - c^2).$$

В гиперболе $a^2 < c^2$; поэтому мы можем положить: $c^2 - a^2 = b^2$ и, следовательно, $a^2 - c^2 = -b^2$; тогда уравнение будет:

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

или

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Наконец, разделив все члены на a^2b^2, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Заметим, что величина b, равная $\sqrt{c^2 - a^2}$, есть катет прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза равна c, другой катет есть a. Построив на чертеже такой треугольник A_1B_1O и отложив еще $OB_2 = OB_1$, мы получим 2 точки B_1 и B_2, которые называются мнимыми вершинами гиперболы; отрезок B_1B_2, равный $2b$, называется мнимою (или побочною) осью гиперболы. В отличие от нее ось $A_1A_2 = 2a$ называется вещественной (или главною) осью.

Если центр гиперболы лежит не в начале координат, а в какой-нибудь точке (m, n) и главная ось параллельна оси x-ов, то уравнение гиперболы будет:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$

Если же главная ось параллельна оси y-ов, то в уравнениях надо x заменить на y и наоборот.

364. Следствия. 1) Так же, как и для эллипса (§ 358), из уравнения гиперболы можно вывести, что эта кривая имеет две оси симметрии, совпадающие с осями координат, и центр симметрии, лежащий в начале координат.

2) Из уравнения гиперболы находим:

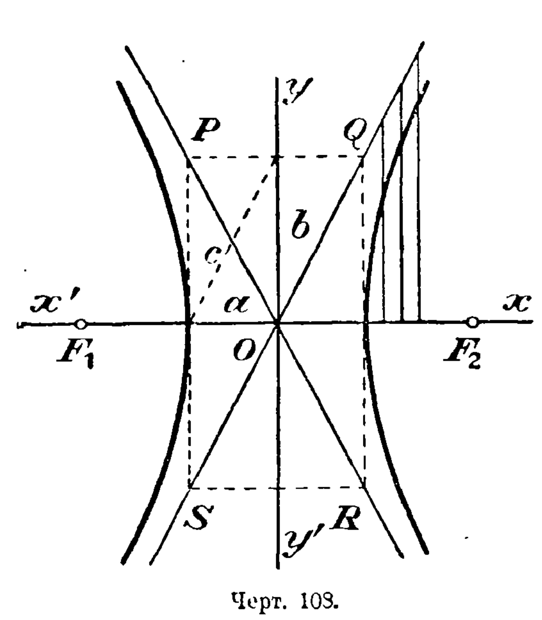
$$y^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)b^2 = \frac{(x^2 - a^2)\,b^2}{a^2}$$

и, следовательно,

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Из этой формулы видно, что гипербола не имеет точек, для которых абсолютная величина абсциссы x была бы меньше a. Наименьшая абсолютная величина x есть a; тогда $y = 0$ и $x = \pm a$, т. е. тогда получаются вершины гиперболы $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$.

3) Из этой же формулы видно, что при неограниченном возрастании абсолютной величины x возрастает неограниченно и абсолютная величина y. Значит, на гиперболе существуют точки, для которых и абсцисса и ордината как угодно велики; другими словами, обе ветви гиперболы бесконечно удаляются и от оси y-ов и от оси x-ов.



Черт. 108.

365. Асимптоты. На чертеже 108-м, на котором изображена гипербола с осями a и b, построим две прямые:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Прямые эти проходят через начало координат и образуют с положительным направлением оси x-ов углы, которых тангенсы равны $\frac{b}{a}$ и $-\frac{b}{a}$. Значит, эти прямые будут продолженными диагоналями прямоугольника $PQRS$, у которого основание равно $2a$ и высота равна $2b$ и расположенного так, как указано на чертеже.

Сравним между собою ординаты этих прямых с ординатами гиперболы при одном и том же значении абсциссы x. Для простоты ограничимся сравнением ординат только для угла xOy:

$$\text{ордината прямой: } y = \frac{b}{a}x;$$

$$\text{„ гиперболы: } y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Так как $x^2-a^2<x^2$, то $\sqrt{x^2-a^2}<x$; поэтому при одном и том же значении x ордината гиперболы меньше ординаты прямой. Определим разность между ними:

$$\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2}).$$

При изменении x это выражение изменяется в том же смысле, в каком изменяется разность, стоящая внутри скобок (так как множимое $\frac{b}{a}$ есть число постоянное и положительное). Но в этой разности при возрастании x возрастают одновременно и уменьшаемое x и вычитаемое $\sqrt{x^2-a^2}$, и мы остаемся в неизвестности, как изменяется сама разность. Поэтому мы преобразуем ее таким образом:

$$x-\sqrt{x^2-a^2}=\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})\ (x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=\frac{x^2-(x^2-a^2)}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Следовательно,

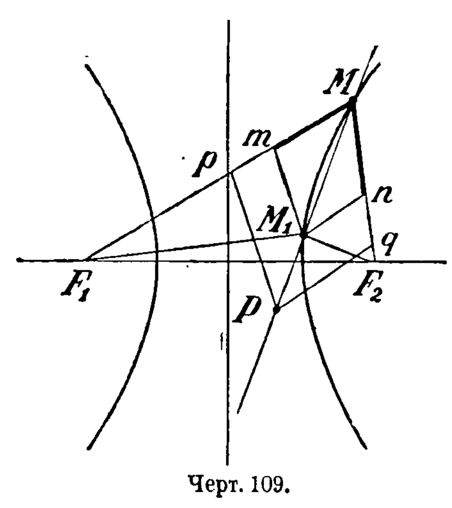
$$\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Теперь видно, что при неограниченном возрастании x знаменатель полученной дроби возрастает неограниченно, тогда как числитель остается неизменным; значит, дробь при этом стремится к нулю. Таким образом, разность между ординатою прямой и ординатою гиперболы (при одном и том же значении x) стремится к нулю, когда абсцисса x неограниченно возрастает; другими словами, ветвь гиперболы по мере возрастания x все более и более приближается к проведенной нами прямой, однако никогда ее не достигает, так как ни при каком значении x (как бы велико оно ни было) разность между ординатами не делается равной нулю.

Сказанное об ординатах, расположенных в угле xOy, может быть повторено и об ординатах, лежащих в других углах. Значит, можем сказать, что прямые; $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$ служат асимптотами гиперболы.

366. Свойство касательной. Касательная к гиперболе есть биссектриса угла, образованного радиусами-векторами, проведенными в точку касания.

Доказательство такое же, какое было изложено нами для эллипса (§ 360). На чертеже (109) сделано соответствующее построение, причем буквы поставлены те же, что и на черт. 103.



Черт. 109.

Читатели могут сами проследить все доказательство, прочитывая то, что было изложено для эллипса. Отрезки Mm и Mn равны, так как они показывают, насколько радиусы-векторы увеличились при переходе от точки M к точке M_1, а эти увеличения должны быть равны, так как разность радиусов-векторов для всех точек гиперболы одна и та же.

Указанное свойство касательной дает простой способ ее построения, когда точки касания и фокусы заданы.

367. Уравнение касательной. Уравнение секущей и затем уравнение касательной выводится для гиперболы совершенно так же, как это мы делали для эллипса (§ 361); разница только та, что координаты двух точек, через которые проведена секущая, приходится подставлять не в уравнение эллипса, а в уравнение гиперболы, а это уравнение отличается от уравнения эллипса:

$$\text{эллипс: } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,; \quad \text{гипербола: } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

только тем, что для гиперболы вместо b^2 берется $-b^2$. Поэтому и уравнение касательной к гиперболе должно отличаться от уравнения касательной к эллипсу только тем, что вместо b^2 надо подставить $-b^2$. Тогда уравнения касательных будут:

$$\text{для эллипса: } \frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1\,; \quad \text{для гиперболы: } \frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1.$$

368. Равносторонняя гипербола. Если в уравнении гиперболы положим $a=b$, то оно будет:

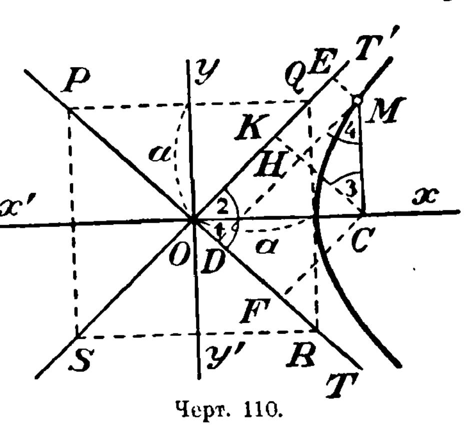
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1, \quad \text{или } x^2-y^2=a^2.$$

Такая гипербола называется р а в н о с т о р о н н е й; она представляет собою такой же частный случай по отношению к ги-

перболе, какой окружность ($x^2+y^2=r^2$) представляет по отношению к эллипсу.

Для такой гиперболы уравнения асимптот будут: $y=x$ и $y=-x$. Значит, асимптотами равносторонней гиперболы служат биссектрисы прямых углов, образованных осями координат, и тогда прямоугольник $PQRS$, которого диагонали лежат на асимптотах, будет квадрат (черт. 110).

Зададимся вопросом, каково будет уравнение гиперболы, если за оси координат примем асимптоты OT и OT' (на чертеже 110-м мы изобразили часть правой ветви равносторонней гиперболы).



Черт. 110.

Пусть M есть какая-нибудь точка гиперболы, координаты которой $x=OC$ и $y=MC$. Опустим из M на OT и OT' перпендикуляры MD и ME. Тогда, если примем OT за ось x-ов и OT' за ось y-ов, то новые координаты будут: $x'=OD=ME$ и $y'=MD=EO$. Определим эти новые координаты как функции от прежних координат. Для этого проведем еще $CF\perp OT$ и $CK\perp OT'$. Заметив, что углы, обозначенные на чертеже цифрами 1, 2, 3 и 4, будут по 45°, мы из чертежа найдем:

$$OD=OF-DF=OF-CH=OC\cos 45^\circ-MC\cos 45^\circ$$

и

$$OE=OK+KE=OK+MH=OC\cos 45^\circ+MC\cos 45^\circ,$$

т. е.

$$x'=x\cos 15^\circ-y\cos 45^\circ=(x-y)\cos 45^\circ$$

и

$$y'=x\cos 45^\circ+y\cos 45^\circ=(x+y)\cos 45^\circ;$$

откуда:

$$x-y=\frac{x'}{\cos 45^\circ},\quad x+y=\frac{y'}{\cos 45^\circ}.$$

Уравнение равносторонней гиперболы $x^2-y^2=a^2$ можно изобразить так: $(x-y)(x+y)=a^2$. Подставив сюда на место $x-y$ и $x+y$ их значения, найденые сейчас, получим:

$$\frac{x'}{\cos 45^\circ}\cdot\frac{y'}{\cos 45^\circ}=a^2, \text{ или } x'y'=a^2\cos^2 45^\circ.$$

Но $\cos^2 45^0 = {}^1/_2$; значит, новое уравнение будет:

$$x'y' = \frac{1}{2}a^2, \text{ или } y' = \frac{{}^1/_2 a^2}{x'}.$$

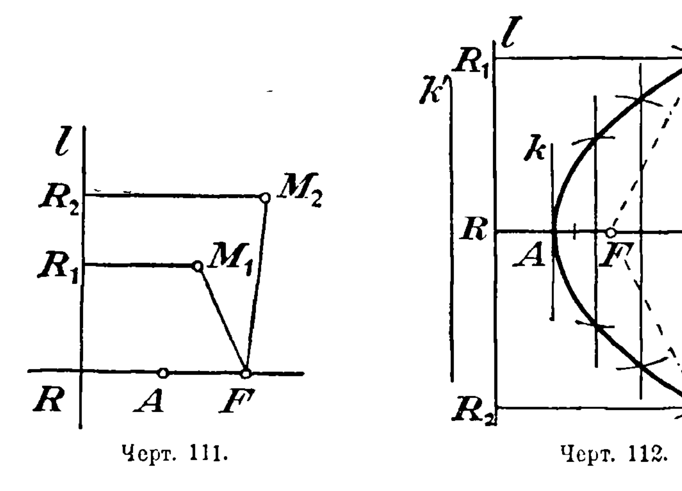
Мы видим теперь, что равносторонняя гипербола есть та самая кривая $y = \frac{a}{x}$, которую мы рассматривали прежде (§ 348), только постоянному числу a надо дать значение ${}^1/_2 a^2$.

Глава четвертая.

Парабола.

369. Определение и построение. Мы раньше говорили о параболе, как такой кривой, которая служит графиком функции $y = ax^2$ (в частности $y = x^2$) (ч. I, § 159). Теперь рассмотрим эту кривую в более общем виде и более подробно.

Параболе мы дадим теперь другое определение: параболой *называется геометрическое место точек плоскости, из которых каждая одинаково удалена от данной точки (называемой фокусом) и от данной прямой (называемой директрисой).*



Черт. 111. Черт. 112.

Так, если точка F есть фокус (черт. 111), прямая l — директриса, и точки $M_1, M_2, \ldots$ взяты на плоскости, проходящей через l и F (на плоскости чертежа), таким образом, что $M_1F = M_1R_1$, $M_2F = M_2R_2 \ldots$ (где $M_1R_1 \perp l$ и $M_2R_2 \perp l$), то такие точки принадлежат кривой, которую мы будем теперь называть параболой. Мы вскоре увидим, что эта кривая тожде-

ственна с той, которую мы прежде так называли. Одна из точек параболы есть A, делящая пополам перпендикуляр FR, опущенный из F на директрису, так как для такой точки $AF = AR$. Такая точка называется **вершиною**, а бесконечная прямая, проходящая через F и A, называется **осью параболы**. Прямые M_1F, $M_2F\ldots$, соединяющие фокус с точками параболы, называются **радиусами-векторами**, отрезок RF, показывающий расстояние фокуса от директрисы, называется **параметром** параболы и обозначается обыкновенно буквой p.

Параболу всего удобнее строить по точкам таким образом. Проведем (черт. 112) несколько прямых, параллельных директрисе l. Взяв какую-нибудь одну из них, напр. M_1M_2, дадим циркулю расстворение, равное расстоянию PR этой параллели от директрисы, и этим расстворением из центра F опишем две небольшие дуги, пересекающие взятую параллель в точках M_1 и M_2. Точки эти принадлежат параболе, так как $M_1F = M_2F = RP = M_1R_1 = M_2R_2$. Подобным же образом на каждой из остальных параллелей мы можем получить по две точки параболы. Параллельные прямые можно брать направо от F как угодно далеко, так как для пересечения дуги с прямою необходимо и достаточно, чтобы расстояние FP от фокуса до прямой было меньше радиуса RP, а это всегда будет иметь место, как бы далеко направо от F ни была удалена параллельная прямая. Налево же от F параллельную прямую можно отодвигать только до крайнего положения, проходящего через вершину A, так как точки всякой прямой, параллельной l и расположенной левее от A (напр., точки прямой k'), отстоят от l, очевидно, меньше, чем от F.

Когда таким образом мы построим достаточное число точек, их можно все обвести непрерывною кривою, которая и будет парабола.

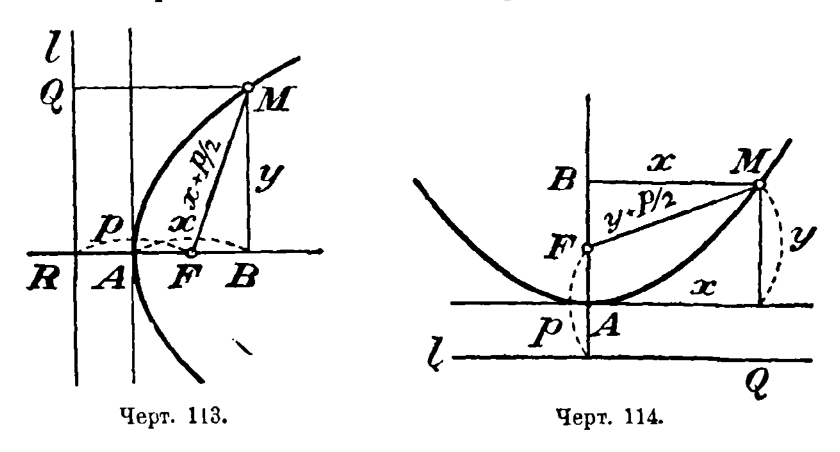
370. Уравнение параболы. Пусть F будет фокус и l директриса (черт. 113) и, следовательно, $FR = p$. Возьмем за ось x-ов ось параболы, а за ось y-ов прямую, проходящую через вершину и, следовательно, параллельную директрисе. Пусть M есть произвольная точка параболы, у которой абсцисса $x = AB$ и ордината $y = MB$. Согласно определению параболы, в тр-ке MBF гипотенуза $FM = MQ = BR = BA + AR = x + \frac{p}{2}$, а катеты $MB = y$ и $FB = BA - AF = x - \frac{p}{2}$. Поэтому:

$$y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} - x^2 + px - \frac{p^2}{4}$$

и, следовательно, уравнение параболы будет такое:

$$y^2 = 2px.$$

Если бы с осью параболы совпадала не ось x-ов, как мы сейчас предполагали, а ось y-ов, и вершина попрежнему совпадала бы с началом координат (черт. 114), то тогда директриса l была бы параллельна оси x-ов, и уравнение было бы иное, а



Черт. 113.

Черт. 114.

именно, оно отличалось бы от предыдущего уравнения тем, что x заменен на y и y на x, от чего мы получили бы:

$$x^2 = 2py \text{ и, следовательно, } y = \frac{1}{2p}x^2.$$

То же самое мы нашли бы из чертежа, так как из тр ка MBF видно:

$$x^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + px + \frac{p^2}{4} - y^2 + px - \frac{p^2}{4},$$

т. е.

$$x^2 = 2py \text{ и } y = \frac{1}{2p}x^2.$$

Если обозначим дробь $\frac{1}{2p}$ буквою a, то уравнение параболы представится тогда так:

$$y = ax^2,$$

а это и есть та функция, которую мы рассматривали прежде (ч. I, § 159). Теперь мы видим, что та кривая, которую мы тогда называли параболой, тождественна с кривой, которую мы теперь назвали параболой, только в прежней параболе осью симметрии

служила ось y-ов, а в параболе, рассматриваемой теперь, ось симметрии есть ось x-ов. Чтобы определить положение фокуса и директрисы в параболе $y = ax^2$, надо найти ее параметр p из равенства:

$$\frac{1}{2p} = a; \text{ откуда } p = \frac{1}{2a}.$$

Значит, фокус лежит на оси y-ов выше начала координат на $^1/_2 p$, а директриса параллельна оси x-ов и лежит ниже ее на $^1/_2 p$ (черт. 114).

Если вершина параболы не совпадает с началом координат, а находится в некоторой точке (m, n), и ось параболы параллельна оси x-ов, то уравнение кривой представится в таком виде:

$$(y - n)^2 = 2p\,(x - m).$$

Если же ось параболы параллельна оси y-ов, то в уравнении надо x заменить на y и наоборот.

371. Следствия. Из уравнения $y^2 = 2px$ видно: 1) отрицательным значениям x не соответствует никакого вещественного значения y; это значит, что вся парабола расположена по правую сторону от оси y-ов.

2) При всяком положительном значении x ордината y имеет 2 значения, отличающиеся только знаками: $y = +\sqrt{2px}$ и $y = -\sqrt{2px}$. Значит, всякая прямая, перпендикулярная к оси x-ов и расположенная правее оси y-ов, пересекается с параболой в двух точках, расположенных симметрично относительно оси x-ов, т. е. эта ось есть ось симметрии.

Черт. 115.

3) При всяком значении ординаты y (как положительном, так и отрицательном) абсцисса x получает определенное значение и только одно: $x = \frac{y^2}{2p}$; значит, всякая прямая, параллельная оси x-ов, пересекается с параболой и только в одной точке. Заметим, что всякая такая прямая называется диаметром параболы.

4) При неограниченном увеличении положительного значения x увеличивается неограниченно и абсолютная величина ординаты y, но увеличивается медленнее, чем абсцисса; так, если абсцисса увеличилась, положим, в 100 раз, то ордината увеличится только в 10 раз.

Замечание. Интересно заметить следующую разницу между параболой и гиперболой. Вообразим, что какая-нибудь точка параболы (напр. точка M, черт. 115) соединена прямой с вершиною; тогда тангенс угла, образованного этою прямою с осью x-ов, будет равен:

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2px}}{x}=\sqrt{\frac{2p}{x}}.$$

Отсюда видно, что при неограниченном возрастании x (при продвижении точки M все далее и далее направо) тангенс этого угла (следовательно, и самый угол) уменьшается, стремясь к нулю. В гиперболе тангенс такого угла тоже равен $\frac{y}{x}$, но там это выражение равно:

$$\frac{y}{x}=\frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x-a}=\frac{b\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}{a\left(1-\frac{a}{x}\right)}$$

и при неограниченном увеличении x тангенс рассматриваемого угла стремится к дроби $\frac{b}{a}$ т. е. к тангенсу угла, образованного асимптотой с осью Ox (что и следует ожидать по свойству асимптоты).

372. Свойство касательной. Касательная к параболе есть биссектриса угла, образованного радиусом-вектором, проведенным из точки касания, и перпендикуляром, опущенным из нее на директрису.

Доказательство вполне уподобляется тому, какое было дано для эллипса и для гиперболы. Возьмем на параболе (черт. 116) две произвольные точки M и M_1, проведем через них секущую, радиусы-векторы и перпендикуляры MN и M_1N_1 на директрису l. Затем отложим $Fn=FM_1$ и проведем $M_1m \parallel l$. Получившиеся при этом отрезки Mm и Mn (обведенные на чертеже жирно) должны быть равны, так как

$$MF=MN,\ Fn=FM_1=M_1N_1=mN$$

и следовательно:

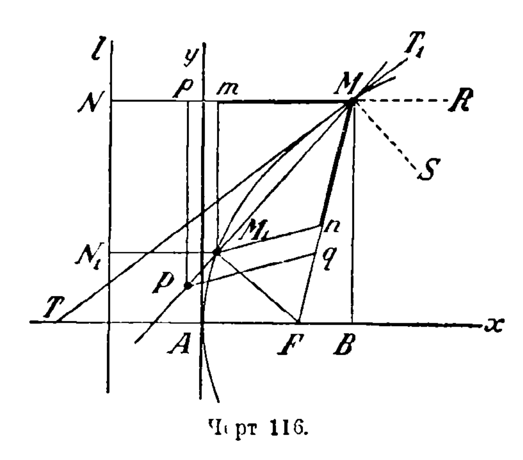
$$MF - Fn = MN - mN,$$

т. е.

$$Mn = Mm.$$

Возьмем еще на секущей произвольную точку P и проведем из нее $Pq \parallel M_1n$ и $Pp \parallel l$. Из подобия четыреугольников $qPpMq$ и M_1mMn следует, что $Mp = Mq$.

Допустим теперь, что точка M_1 неограниченно приближается к M. Тогда секущая приближается все ближе и ближе к касательной MT, прямая M_1n приближается все более и более к перпендикулярности к MF (что следует из рассмотрения равнобедренного тр-ка FM_1n), а прямая Pp все время остается перпендикулярной к MN. Следовательно, когда секущая займет положение касательной MT, прямоугольные тр-ки PMq и PpM окажутся равными, и углы pMT и TMq сделаются равными.



Черт 116.

Это свойство дает простой способ проведения касательной, когда точка касания дана.

Проведем еще нормаль MS к параболе в точке M Так как $\angle NMT = \angle T_1MR$ и $\angle NMT = \angle TMF$, то $\angle T_1MR = \angle TMF$, поэтому и $\angle FMS = \angle SMR$. Таким образом нормаль к параболе, проведенная через какую-нибудь ее точку M, делит пополам угол, образованный радиусом-вектором и диаметром, проведенными из этой точки. На этом основано практическое применение параболических зеркал, как **прожекторов**; если в фокусе такого зеркала поставить источник света, то лучи его, отразившись от зеркала (по закону: угол падения равен углу отражения), пойдут по направлениям, параллельным оси зеркала.

373. Уравнение касательной. Если $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ две какие-нибудь точки параболы, то уравнение секущей, проходящей через них, есть (§ 352):

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Координаты точек M_1 и M_2 должны удовлетворять уравнению параболы:

$$y_2^2 = 2px_2 \text{ и } y_1^2 = 2px_1;$$

откуда:

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p(x_2 - x_1),$$

или

$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 2p(x_2 - x_1)$$

и следовательно,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}.$$

Тогда уравнение секущей можно написать так:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}.$$

Вообразим теперь, что точка M_2 приближается к M_1 и, наконец, сливается с ней. Тогда секущая обращается в касательную, и уравнение секущей делается уравнением касательной ($y_2 = y_1$):

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{2p}{2y_1} = \frac{p}{y_1},$$

или

$$y_1 y - y_1^2 = px - px_1.$$

Но

$y_1^2 = 2px_1$; следовательно, $y_1 y - 2px_1 = px - px_1$.

Откуда:

$$y_1 y = p(x + x_1).$$

374. Следствие. Найдем точку пересечения касательной с осью x-ов. Для этого достаточно в уравнении касательной положить $y = 0$ и найти соответствующее значение x. Тогда получим:

$$0 = p(x + x_1);\ x = -x_1.$$

Из чертежа 116-го видно, что абсцисса точки пересечения есть $-AT$ и $x_1 = AB$; значит, $-AT = -AB$ и $AT = AB$. Таким образом, *вершина параболы делит пополам подкасательную* (так называется проекция касательной MN на ось x-ов). Это дает нам другой простой способ проведения касательной, когда точка касания задана.

375. Замечания. 1) Просматривая уравнения, выведенные нами для эллипса, гиперболы и параболы, мы видим, что все они 2-й степени с 2 неизвестными x и y. Благодаря особому расположению координатных осей, мы получили эти уравнения в упрощенном виде. В подробных курсах аналитической гео-

метрии доказывается, что, во-перых, указанные кривые выражаются уравнениями 2-й степени при всяком расположении координатных осей, и, во-вторых, наоборот, всякое уравнение 2-й степени с 2 неизвестными x и y, отнесенное к прямоугольным координатным осям, выражает собою вообще какую-нибудь из этих кривых. Поэтому кривые — эллипс, гипербола и парабола — называются **кривыми 2-го порядка** (т. е. кривыми, выражающимися уравнениями 2-й степени).

2) Доказано, что если боковую поверхность прямого кругового конуса пересечь какою-нибудь плоскостью, то в сечении получится (в зависимости от того, как проведена секущая плоскость) или эллипс (в частности окружность), или парабола или гипербола. Поэтому кривые эти называются также **коническими сечениями**[1]).

---

[1]) Об этих сечениях см. А. Киселев — „Элементарная геометрия" (1927 г.), § 441 и след.

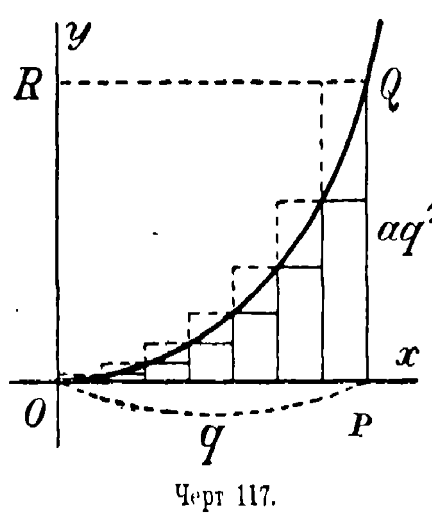
ОТДЕЛ СЕМНАДЦАТЫЙ.

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ.

Глава первая.

Нахождение площади, ограниченной дугою параболы, ординатою и абсциссою.

376. Способ 1-й: *посредством нахождения предела суммы бесконечно большого числа слагаемых.* Пусть требуется найти площадь S фигуры (черт. 117), ограниченной дугою OQ параболы $y=ax^2$, ординатою PQ и абсциссою $OP=q$. Для этого разделим абсциссу OP на произвольное число n равных частей и из всех точек деления проведем n ординат, которые мы обозначим (слева направо) буквами: y_1, y_2, y_3,...$y_n=PQ$. Этими ординатами площадь S разобьется на n полос одинаковой ширины, равной



Черт 117.

$\frac{1}{n}$ OP. Обозначим эту ширину буквой a и площади полос (слева направо) буквами: s_1, s_2, s_3,...s_n. Построим для каждой полосы два прямоугольника, оба с общим основанием a и с высотою: у одного (выходящего), равною ординате, ограничивающей полосу справа, у другого (входящего), равною ординате, ограничивающей полосу слева. Из чертежа видно, что площадь каждой полосы меньше площади соответствующего прямоугольника выхо-

дящего, но больше площади соответствующего прямоугольника входящего. Значит:

$$\begin{aligned} ay_1 &> s_1 > 0 \\ ay_2 &> s_2 > ay_1 \\ ay_3 &> s_3 > ay_2 \\ &\dots\dots\dots \\ ay_n &> s_n > ay_{n-1}\,. \end{aligned}$$

Сложив все эти неравенства, получим:

$$a(y_1+y_2+\dots+y_n) > S > a(y_1+y_2+\dots+y_{n-1}).$$

Разность между крайними частями последнего неравенства равна $ay_n = a\cdot PQ$; поэтому

$$a(y_1+y_2+\dots+y_n) - S < a\cdot PQ.$$

Вообразим теперь, что мы неограниченно увеличиваем число n полос; тогда $a \to 0$, поэтому и $a\cdot PQ \to 0$. Значит, из последнего неравенства следует, что:

$$S = \text{пред. } a(y_1+y_2+\dots+y_n), \text{ если } a \to 0.$$

Остается найти этот предел. Из уравнения параболы $y = ax^2$ находим:

$$y_1 = aa^2,\ y_2 = a(2a)^2,\ y_3 = a(3a)^2, \dots y_n = a(na)^2.$$

Значит:

$$y_1+y_2+y_3+\dots+y_n = aa^2(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2) = aa^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(ч. I, § 244) и потому

$$S = \text{пред. } aa^3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Разобьем a^3 на 3 множителя: aaa; из них один отнесем к сомножителю n, другой к сомножителю $n+1$ и третий к сомножителю $2n+1$. Тогда можем написать:

$$S = \text{пред. } a\frac{an(an+a)(2an+a)}{6} =$$

$$= \text{пред. } a\frac{q(q+a)(2q+a)}{6}$$

(так как $an = q$). Предел произведения равен произведению пределов; поэтому:

$$S = \frac{1}{6}aq\cdot\text{пред. }(q+a)\cdot\text{пред. }(2q+a) =$$

$$= \frac{1}{6}aq\cdot q\cdot 2q = \frac{1}{3}aq^3.$$

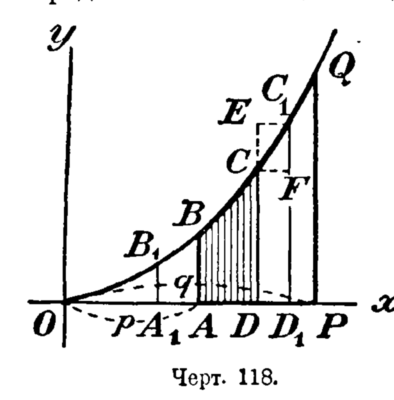
Выражение это можно представить так:

$$S = \frac{1}{3} aq^2 \cdot q = \frac{1}{3} PQ \cdot q$$

Таким образом, площадь рассматриваемой фигуры составляет $^1/_3$ площади прямоугольника $OPQR$, две стороны которого суть абсцисса и ордината, ограничивающие данную площадь; $^2/_3$ этого прямоугольника приходится на площадь фигуры ORQ.

377. Способ 2-й: *посредством вспомогательной функции.* Решим теперь ту же задачу другим приемом, имеющим очень большое значение в математике при нахождении площадей и объемов.

Изменим несколько условие задачи, а именно, допустим, что определяемая площадь не доходит слева до точки O, а ограничивается какою-нибудь ординатою AB (черт. 118), соответствующею абсциссе $OA = p$. Если нам удастся определить эту площадь, то, положив $p = 0$, мы затем найдем и площадь фигуры OPQ. Вместо этой площади станем находить площадь фигуры $ABCD$ (покрытой на чертеже штрихами), которая справа ограничена подвижной ординатой CD, могущей перемещаться от крайнего левого положения AB до крайнего правого положения PQ. Пусть $OD = x$ и $CD = y$. Очевидно, что если x изменяется, то изменяется и площадь $ABCD$ (мы ее обозначим буквою z); значит, эта площадь есть некоторая функция от абсциссы x. Если мы эту функцию найдем, то, приняв в ней $x = OP = q$, мы найдем тогда и площадь $ABQP$, а приняв еще $p = 0$, получим площадь OPQ. Для нахождения этой функции предварительно разъясним следующее важное свойство ее.



Черт. 118.

Пусть $x = OD$ получит некоторое приращение $\Delta x = DD_1$; тогда площадь z получит приращение Δz, равное площади DCC_1D_1. Площадь эта меньше площади прямоугольника DEC_1D_1, но больше площади прямоугольника $DCFD_1$; поэтому:

$$\Delta x \cdot C_1D_1 > \Delta z > \Delta x \cdot CD$$

откуда:

$$C_1D_1 > \frac{\Delta z}{\Delta x} > CD.$$

Предположим теперь, что $\Delta z \longrightarrow 0$. Тогда отношение $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ стремится к пределу, называемому производной z' от функции z, а C_1D_1 имеет, очевидно, пределом CD. Значит:

$$z' = \text{пред.}\ \frac{\Delta z}{\Delta x} = CD.$$

Мы приходим таким образом к следующему свойству функции z: *площадь ABCD есть такая функция от переменной абсциссы $x = OD$, от которой производная равна переменной ординате $y = CD$.*

В нашем примере $CD = ax^2$. Поэтому теперь возникает вопрос, нельзя ли найти такую функцию, чтобы ее производная равнялась ax^2. Легко сообразить, что за искомую функцию можно принять одночлен $^1/_3ax^3$, так как $(^1/_3ax^3)' = {}^1/_3 \cdot 3ax^{3-1} = ax^2$. Но не только $^1/_3ax^3$ дает производную ax^2, та же производная получается и от функций: $^1/_3ax^3 + 1$, $^1/_3ax^3 + 2$..., вообще от функции вида $^1/_3ax^3 + C$, где C означает произвольное постоянное число (положительное или отрицательное). Действительно, так как производная от суммы равна сумме производных от слагаемых и производная от постоянного числа равна нулю, то

$$\left(\frac{1}{3}ax^3 + C\right)' = \left(\frac{1}{3}ax^3\right)' + C' = ax^2 + 0 = ax^2.$$

Значит, существует бесчисленное множество функций, от которых производная равна данной функции: все они представляют собою одну и ту же функцию (в нашем случае $^1/_3ax^3$), к которой прибавлено произвольное постоянное число.

Это же видно и из чертежа 118-го. Если для функции, выражающей площадь $ABCD$, производная равна ординате CD, то та же самая ордината CD будет служить производной для всякой другой функции, выражающей площадь, которая получится вместо $ABCD$, если ординату AB отодвинуть на произвольное расстояние влево от AB, или вправо от AB, напр., если вместо $ABCD$ взять площадь A_1B_1CD. Действительно, будет ли взята площадь $ABCD$, или площадь A_1B_1CD, приращение Δz, соответствующее приращению абсциссы x на $\Delta x = DD_1$, остается то же самое, следовательно, и предел отношения $\Delta z : \Delta x$, когда $\Delta x \longrightarrow 0$ будет тот же самый.

Таким образом, $z = {}^1/_3ax^3 + C$. Здесь C остается произвольным, пока речь идет только о том, чтобы производная z' равнялась ax^2. Но в нашем вопросе еще требуется, чтобы искомая функ-

ция при $x = OA = p$ обратилась в нуль. Тогда число C должно получить такое значение, которое удовлетворяет равенству: ${}^1/_3ap^3 + C = 0$, откуда найдем: $C = -{}^1/_3ap^3$. Следовательно:

$$z = {}^1/_3ax^3 - {}^1/_3ap^3.$$

Если в этой функции положим $x = OP = q$, то получим:

$$\text{площ. } ABCD = {}^1/_3aq^3 - {}^1/_3ap^3,$$

и, наконец, если еще допустим, что $p = 0$, то найдем:

$$\text{площ. } OQP = {}^1/_3aq^3 = {}^1/_3aq^2 \cdot q = {}^1/_3PQ \cdot q,$$

т. е. мы получим ту же формулу, которую нашли раньше другим путем.

Глава вторая.

Первообразная функция.

378. Определение. В предыдущем параграфе нам пришлось решать вопрос: дана некоторая функция (в нашей задаче $y = ax^2$); найти такую другую функцию, чтобы производная от нее равнялась данной функции. *Функция, от которой производная равна данной функции, называется* первообразной функцией *по отношению к этой данной.* Так, функция $z = {}^1/_3ax^3 + C$, которую мы сейчас нашли, есть первообразная по отношению к данной функции $y = ax^2$, так как

$$({}^1/_3ax^3 + C)' = ax^2.$$

Очевидно, что вопрос о нахождении первообразной функции есть вопрос обратный нахождению производной от данной функции[1]). Решение его основывается на умении находить производные. Так, зная, что $(kx^3)' = 3kx^2$, мы соображаем, что первообразная функция от ax^2 есть ${}^1/_3ax^3$.

Подобно этому легко находим:

1) если $z' = x$, то $z = {}^1/_2x^2 + C$

$$[\text{проверка: } ({}^1/_2x^2 + C)' = {}^1/_2 \cdot 2x^{2-1} = x);$$

[1]) Нахождение производных от данных функций называется в математике дифференцированием этих функций, а обратный вопрос — нахождение первообразных функций от данных — называется интегрированием этих данных функций. Сообразно этому дифференциальным исчислением называется отдел математики, указывающий способы дифференцирования функций, а интегральным исчислением — отдел, указывающий способы интегрирования функций. В нашей книге дается только краткое понятие об этих отделах.

2) если $z' = 3x$, то $z = 3 \cdot {}^1/_2 x^2 + C = {}^3/_2 x^2 + C$;
3) если $z' = ax$, то $z = a \cdot {}^1/_2 x^2 + C = {}^1/_2 ax^2 + C$;
4) если $z' = x^2$, то $z = {}^1/_3 x^3 + C$;
5) если $z' = 3x^2 - 2x$, то $z = x^3 - x^2 + C$;
6) если $z' = ax^2 + bx + c$, то $z = {}^1/_3 ax^3 + {}^1/_2 bx^2 + cx + C$; и т. п.

Глава третья.

Некоторые применения первообразной функции.

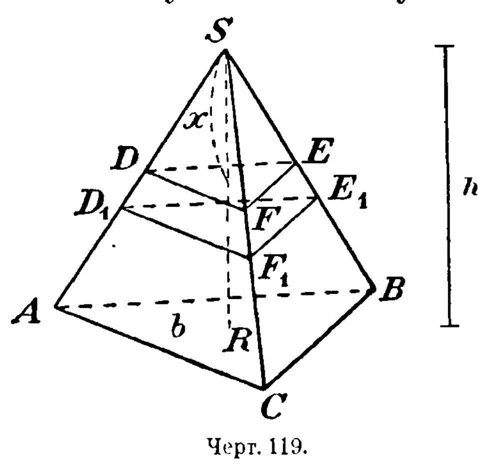
379. Нахождение закона пространства по данному закону скорости. Мы видели (§ 340), что если при каком-нибудь прямолинейном движении известна функция: $e = f(t)$, выражающая зависимость пространства e от времени t, в течение которого это пространство проходится, то производная от этой функции выразит скорость движения в зависимости от времени: $f'(t) = v$. Значит, по данному закону пространства мы можем найти закон скорости. Обратно, если известен закон скорости, то мы можем найти закон пространства; стоит только найти первообразную функцию от той, которая выражает закон скорости. Так, при свободном падении тела скорость, как мы знаем, подчиняется закону: $v = gt$; тогда высота, с которой тело падает в течение t секунд, должна быть первообразной функцией от gt, а эта функция есть ${}^1/_2 gt^2 + C$. Для определения C положим $t = 0$; тогда высота, соответствующая этому значению времени, должна быть 0, и следовательно, $C = 0$, и потому высота h, проходимая падающим телом в t секунд, выражается формулою $h = {}^1/_2 gt^2$.

Подобно этому, при движении тела, брошенного вертикально вверх с начальною скоростью v_0, скорость выражается формулою: $v = v_0 - gt$. Тогда высота, на которую тело подымается в t секунд, должна выразиться формулою $h = v_0 t - {}^1/_2\ gt^2 + C$, где C надо принимать равным 0, так как при $t = 0$ высота поднятия h также равна 0.

380. Нахождение закона скорости по данному закону ускорения. Мы видели (§ 343), что если известна функция, выражающая скорость в зависимости от времени: $v = f(t)$, то производная от этой функции выразит ускорение w этого движения: $w = f'(t)$. Значит, наоборот, если известна функция, выражающая зависимость ускорения от времени, то первообразная функция выразит зависимость скорости от времени. Так, при движении тела, брошенного вертикально вверх, ускорение всегда равно $-g$; тогда

скорость v должна быть первообразной функцией от $-g$, т. е. $v=-gt+C$. Положив $t=0$, найдем: $v_0=C$ и, следовательно, $v=-gt+v_0=v_0-gt$.

381. Применение первообразной функции к нахождению объемов. Объем пирамиды. Первообразной функцией можно пользоваться часто и при нахождении объемов. Приведем этому некоторые примеры. Начнем с нахождения объема треугольной пирамиды $SABC$ (черт. 119), у которой площадь основания ABC обозначим буквою b и высоту SR буквою h. Проведем в пирамиде сечение DEF плоскостью, параллельной основанию и отстоящею от вершины на x единиц. Вместо того, чтобы находить объем всей данной пирамиды, станем искать объем только верхней ее части $SDEF$. Если мы найдем этот объем в зависимости от высоты x, то затем легко будет получить объем полной пирамиды, положив $x=h$. Очевидно, что объем $SDEF$ есть некоторая функция от высоты x; обозначим ее z. Дадим высоте x приращение Δx, от чего тр-к DEF переместится в положение $D_1E_1F_1$. Тогда объем пирамиды получит приращение Δz, равное объему слоя, заключенного между DEF и $D_1E_1F_1$. Очевидно, что объем этого слоя больше объема призмы, у которой основание есть тр-к DEF и высота Δx, но меньше объема призмы, у которой основание есть тр-к $D_1E_1F_1$ и высота Δx. Но объем призмы равен произведению площади основания на высоту; поэтому:



Черт. 119.

$$\text{площ. } D_1E_1F_1 \cdot \Delta x > \Delta z > \text{площ. } DEF \cdot \Delta x.$$

откуда:

$$\text{площ. } D_1E_1F_1 > \frac{\Delta z}{\Delta x} > \text{площ. } DEF.$$

Положим теперь, что $\Delta x \to 0$; тогда $\frac{\Delta z}{\Delta x} \to z'$ и площ. $D_1E_1F_1 \to$ площ. DEF. Значит:

$$z' = \text{площ. } DEF.$$

Из свойства сечений пирамиды, сделанных плоскостями, параллельными основанию, следует:

$$\text{площ. } DEF : \text{площ. } ABC = x^2 : h^2,$$

откуда:

$$\text{площ. } DEF = \text{площ. } ABC \cdot \frac{x^2}{h^2} = \frac{bx^2}{h^2}.$$

Значит:

$$z' = \frac{bx^2}{h^2},$$

и поэтому:

$$z = \frac{b}{h^2} \cdot \frac{1}{3} x^3 + C = \frac{bx^3}{3h^2} + C.$$

Если $x = 0$, то объем пирамиды равен 0; значит, $C = 0$ и потому:

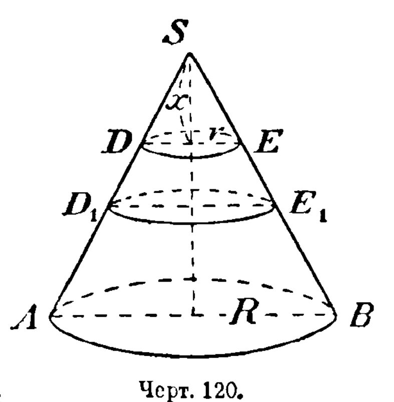
$$z = \frac{bx^3}{3h^2}.$$

Теперь положим, что $x = h$; тогда найдем объем полной пирамиды:

$$\text{объем } SABC = \frac{bh^3}{3h^2} = \frac{1}{3} bh,$$

т. е. *объем треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.*

Так как многоугольная пирамида есть сумма объемов треугольных пирамид, то этот вывод относится и к многоугольной пирамиде.



Черт. 120.

382. Объем конуса определяется так же, как и объем пирамиды. Пусть в конусе (черт. 120) сделано сечение плоскостью, параллельною основанию, на расстоянии x от вершины S. Обозначим радиусы: круга сечения r, основания R, высоту конуса H и объем отсеченного конуса SDE буквою z. Пусть x получит приращение Δx, так что круг DE займет положение D_1E_1. Тогда объем z получит приращение Δz, равное объему слоя, заключенного между кругами DE и D_1E_1. Объем этот, очевидно, больше объема цилиндра, построенного на круге DE как на основании и имеющего высоту Δx, но меньше другого цилиндра, построенного на основании D_1E_1 и имеющего ту же высоту Δx. Так как

объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту, то, значит:

$$\text{площ. } DE\cdot\Delta x < \Delta z < \text{пл. } D_1E_1\cdot\Delta x,$$

откуда:

$$\text{площ. } DE < \frac{\Delta z}{\Delta x} < \text{пл. } D_1E_1.$$

Предположим теперь, что $\Delta x, \rightarrow 0$; тогда:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} \rightarrow z', \text{ а } D_1E_1 \rightarrow DE.$$

Значит:

$$z' = \text{площ. } DE = \pi r^2.$$

Из чертежа видно, что $x:H = r:R$; отсюда находим:

$$r = \frac{Rx}{H} \text{ и } z' = \frac{\pi R^2x^2}{H^2},$$

следовательно,

$$z = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + C = \frac{\pi R^2x^3}{3H^2} + C.$$

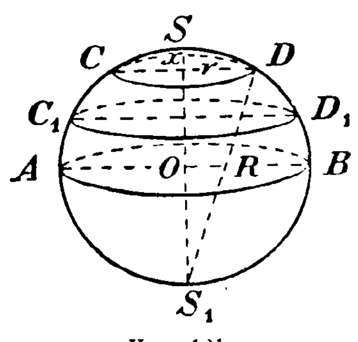
При $x = 0$ объем z должен равняться также нулю; следовательно, $C = 0$ и потому

$$z = \frac{\pi R^2x^3}{3H^2}.$$

Положим теперь $x = H$; тогда найдем:

$$\text{объем конуса } SAB = \frac{\pi R^2H^3}{3H^2} = \frac{1}{3}\pi R^2H,$$

т. е. *объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.*



Черт. 121.

383. Объем шарового сегмента и шара. Пусть в шаре радиуса R (черт. 121) проведен произвольный диаметр SS_1 и какою-нибудь плоскостью CD, перпендикулярною к этому диаметру, сделано в шаре сечение на расстоянии x от конца S диаметра SS_1. Плоскость эта отсечет от шара сегмент SCD, объем которого обозначим z, а радиус основания r.

Пусть x получит приращение Δx и круг CD займет положение C_1D_1. Тогда объем z получит приращение Δz, равное

объему слоя, заключенного между кругами CD и C_1D_1. Объем этот больше объема цилиндра, с высотою Δx и основание которого есть круг CD, но меньше объема цилиндра с тою же высотою Δx, но с основанием C_1D_1. Следовательно,

$$\text{площ. } CD \cdot \Delta x < \Delta z < \text{площ. } C_1D_1 \cdot \Delta x,$$

откуда:

$$\text{площ. } CD < \frac{\Delta z}{\Delta x} < \text{площ. } C_1D_1.$$

Если

$$\Delta x \to 0, \text{ то } \frac{\Delta z}{\Delta x} \to z' \text{ и площ. } C_1D_1 \to \text{площ. } CD.$$

Значит:

$$z' = \text{площ. } CD = \pi r^2.$$

Если соединим точку D прямыми с S и S_1, то получим прямоугольный треугольник DSS_1. В этом треугольнике перпендикуляр r, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная величина между отрезками гипотенузы, из которых верхний есть x, а нижний $2R - x$. Значит, $r^2 = x(2R - x)$ и потому:

$$z' = \pi x(2R - x) = 2\pi Rx - \pi x^2.$$

Следовательно,

$$z = 2\pi R \cdot \frac{1}{2} x^2 - \pi \cdot \frac{1}{3} x^3 + C = \pi R x^2 - \frac{1}{3}\pi x^3 + C.$$

Так как при $x = 0$ также и $z = 0$, то и $C = 0$; значит:

$$z = \pi R x^2 - \frac{1}{3}\pi x^3 = \pi x^2 \left(R - \frac{1}{3} x\right).$$

Таким образом, *объем шарового сегмента равен объему цилиндра, у которого радиус основания есть высота сегмента, а высота равна радиусу шара, уменьшенному на третью часть высоты сегмента.*

При $x = R$ получим объем полушария, а умножив его на 2, найдем

$$\text{объем шара} = \pi R^2 \left(R - \frac{1}{3} R\right) \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Так как $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi R^2 \cdot R$, то можно сказать, что *объем шара равен одной трети произведения его поверхности на радиус.*

ОТДЕЛ ВОСЕМНАДЦАТЫЙ.

ДОБАВЛЕНИЯ.

Глава первая.

Однозначность первых четырех алгебраических действий.

384. Предварительные разъяснения. Как мы говорили прежде (ч. I, § 36), два алгебраических выражения называются **тождественными**, если при всяких численных значениях букв они имеют одну и ту же численную величину. Для обозначения тождественности двух выражений иногда употребляют особый знак ($\equiv$), который ставят между тождественными выражениями Напр., пишут:

$$(a+b)\,(a-b)\equiv a^2-b^2,$$

желая этим выразить, что произведение $(a+b)\,(a-b)$ равно разности a^2-b^2 не при каких-либо частных значениях букв a и b, а при всевозможных. Знак этот, впрочем, большею частью заменяется обыкновенным знаком равенства ($=$).

Все равенства, которые мы выводили в предыдущих главах для преобразования алгебраических выражений, представляют собою тождества, т.-е. равенства тождественных выражений. Таковы, напр., равенства:

$$m+(a-b+c)\equiv m+a-b+c \quad \text{(ч. I, § 48)}$$
$$m-(a-b+c)\equiv m-a+b-c \quad \text{(ч. I, § 50)}$$
$$(a+b-c)(m-n)\equiv am-an+bm-bn-cm+cn \ \text{(ч. I, § 56)}.$$

Выводя эти равенства и основанные на них правила алгебраических действий, мы однако не задавались вопросом, одно-

значны ли эти действия, или многозначны. Напр., мы вывели правило, что для умножения многочлена на многочлен надо умножить каждый член множимого на каждый член множителя и полученные произведения сложить. Таким образом, применив это правило к двум данным многочленам, мы должны получить такой третий многочлен, который при всевозможных численных значениях букв равен произведению данных многочленов при этих значениях букв. Но мы при этом не задавались вопросом, нельзя ли каким-нибудь другим путем найти еще иной многочлен, который также тождественно равнялся бы произведению данных многочленов, а до тех пор, пока мы не решили этого вопроса, мы остаемся в неизвестности, однозначно ли алгебраическое умножение многочленов, или, быть-может, двузначно и даже многозначно. Такой же вопрос возникает и о других алгебраических действиях.

В этой главе мы займемся разрешением указанного вопроса и прежде всего установим признак, по которому можно узнать, когда два многочлена тождественны между собою.

385. Некоторые замечания о многочленах. Во всякое алгебраическое выражение могут входить числа, выраженные цифрами, и числа, выраженные буквами. Последние могут быть двоякого рода: или это постоянные числа, предполагаемые данными, или же это переменные числа, величину которых мы можем произвольно изменять. Постоянные числа обыкновенно обозначаются первыми буквами алфавита (a, b c, . . .), а числа переменные — последними (x, y, z, . . .).

Всякий целый многочлен, можно сказать, представляет собою алгебраическую сумму одночленов вида

$$Ax^m y^n z^p \ldots,$$

где буквы x, y, z... означают произвольные переменные числа, а коэффициент A и показатели степени m, n, p... — какие-нибудь постоянные числа, причем показатели предполагаются числами целыми положительными (в частных случаях некоторые из них и даже все могут быть нулями). Мы будем предполагать что в многочленах, о которых нам придется говорить в этой главе, сделано приведение подобных членов.

Если коэффициенты членов многочлена сделаются равными нулю, кроме какого-нибудь одного, то многочлен обратится в одночлен, так что можно сказать, что одночлен есть частный случай многочлена.

Сумма всех показателей при переменных числах в одночлене называется **степенью** его, или **измерением**. Тот член многочлена, которого степень наибольшая, называется **высшим** членом его, а тот, которого степень наименьшая, называется **низшим** членом. Степенью самого многочлена называется степень его высшего члена. Если все члены одного измерения, то многочлен называется **однородным**. Тот член многочлена, который совсем не содержит переменных (иначе сказать, член нулевой степени), называется **свободным** членом.

Приведем некоторые примеры многочленов:

1) $2x-5$ двучлен 1-й степени;

2) x^2-3x+6 трехчлен 2-й степени;

3) $3x^4+\frac{1}{2}x^2-x+10$ неполный многочлен 4-й степени (не содержит члена с x^3),

4) $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Kx+L$ общий вид многочлена m-й степени, содержащего одно переменное и расположенного по убывающим степеням этого переменного;

5) $x^2-3xy+y^2$ однородный трехчлен 2-й степени с двумя переменными;

6) $4xy^2z+x^3-x^2y-2xyz+5x$ многочлен 4-й степени с 3 переменными (не содержит свободного члена).

386. Лемма. *Если целый многочлен с одним переменным x* (обозначим его для краткости одной буквою M):

$$M=Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Kx$$

не содержит свободного члена, то всегда можно найти такое значение x не равное нулю, при котором абсолютная величина этого многочлена будет как угодно мала, т.-е. она будет меньше любого положительного числа a, как бы мало последнее ни было.

Доказательство. Очевидно, что абсолютная величина многочлена меньше суммы абсолютной величины всех его членов (или в крайнем случае равна ей). С другой стороны, если для x будем брать положительные числа, меньшие 1, то

$$x^2<x,\ x^3<x,\ x^4<x \text{ и т. д.}$$

Поэтому, обозначив абсолютные величины чисел M, A, B, $C\ldots$ и x буквами: M', A', B', $C'\ldots x'$, мы можем написать:

$$M'\leqslant A'x'+B'x'+C'x'+\ldots+K'x',$$

т. е.

$$M'\leqslant(A'+B'+C'+\ldots+K')x' \text{ (при } x'<1).$$

Из этого неравенства видно, что если для x' возьмем какое-нибудь положительное число, которое, будучи меньше 1, в то же время и меньше частного a: $(A'+B'+C'+\ldots+K')$, то тогда M' сделается меньше a, что и требовалось доказать.

Напр., многочлен $x^4-3x^3+x^2-2x$ сделается по абсолютной величине меньше 0,000001, если для x возьмем какое-нибудь положительное число, меньшее частного 0,000001 : (1 + 3 + 1 + 2), т. е. меньше $^1/_7$ миллионной.

387. Теорема. *Для того чтобы целый многочлен тождественно равнялся нулю* (т. е равнялся нулю при всяких численных значениях переменных), *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты всех его членов были нули.*

Доказательство. Сначала докажем эту теорему для многочлена M с одним переменным:

$$M=Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Kx+L.$$

1) Необходимость признака. Предположим, что $M=0$ при всяких значениях x; покажем, что тогда коэффиценты всех его членов (и свободный член L) должны быть нули. Если $M=0$ при всяких значениях x, то $M=0$ и при $x=0$. Но при этом значении x многочлен M обращается в L; значит, тогда $L=0$. Теперь данный многочлен можно представить так:

$$M=x(Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Ix+K)$$

или

$$M=x(N+K),$$

если положим:

$$N=Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Ix.$$

Так как $M=0$ при всяких значениях x, то $M=0$ и при всех значениях x, отличных от нуля. Но при таких значениях произведение $x(N+K)$ может равняться нулю только тогда, когда $N+K=0$. Это возможно только тогда, когда $K=0$. В самом деле, допустим временно, что $K\neq 0$. Тогда, согласно доказанной выше лемме, можно для x найти такое значение (отличное от нуля), при котором абсолютная величина многочлена N, не содержащего свободного члена, сделается меньше абсолютной величины K; при таком значении x алгебраическая сумма $N+K$, очевидно, не может равняться нулю. Значит, необходимо, чтобы $K=0$. Представив теперь данный многочлен так:

$$M=x^2(Ax^{m-2}+Bx^{m-3}+\ldots+I),$$

мы таким же путем докажем, что $I=0$ и т. д., т. е. окажется, что все коэффициенты должны быть нули.

2) Достаточность признака. Пусть все коэффициенты будут нули; тогда при всяком значении x каждый член многочлена равен нулю, и поэтому $M=0$.

Докажем теперь теорему для многочлена с 2 переменными x и y. Расположим его члены по убывающим степеням одного какого-нибудь переменного, напр., x; тогда многочлен будет иметь вид:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L. \qquad (1)$$

где буквы $A, B, C \ldots L$ означают некоторые многочлены (или одночлены), содержащие переменное y, причем коэффициенты этих многочленов принадлежат к коэффициентам данного многочлена[1]). Дадим теперь переменному y какое-нибудь частное значение, y_0. Тогда коэффициенты $A, B, C, \ldots$ получат некоторые частные значения, которые мы обозначим $A_0, B_0, C_0 \ldots L_0$, и многочлен будет:

$$A_0x^m + B_0x^{m-1} + C_0x^{m-2} + \ldots + L_0. \qquad (2)$$

Допустим, что многочлен (1) обращается в нуль при всевозможных значениях x и y; но тогда он обращается в нуль при $y=y_0$ и любом значении x. Значит, многочлен (2) обращается в 0 при всяком значении x. Поэтому, по доказанному выше, $A_0=0$, $B_0=0, \ldots L_0=0$. Но так как y_0 мы взяли произвольно, то многочлены $A, B, C \ldots L$ (с одним переменным y) должны быть равны 0 при всяком значении y, а для этого нужно, чтобы все коэффициенты этих многочленов были нули. Но коэффициенты эти служат также и коэффициентами данного многочлена; значит, последние должны быть нули.

Достаточность признака очевидна сама собою.

---

[1]) Если, напр., данный многочлен будет такой:

$$ax^3 + x^2 + by^2x + cxy - dx^2y^3 - ex + fy + k,$$

то, расположив его по убывающим степеням x, получим многочлен:

$$ax^3 + (1 - dy^3)x^2 + (by^2 + cy - e)x + (fy + k),$$

для которого, следовательно, $A=a$, $B=1-dy^3$, $c=by^2+cy-e$ и т. д. Коэффициенты этих выражений суть $a, b, c \ldots$, т. е. коэффициенты данного многочлена.

После этого тем же приемом докажем теорему и для 3 переменных, потом для 4 и т. д.

Теперь мы можем легко установить следующий закон тождества многочленов.

388. Теорема. *Для того, чтобы два целых многочлена были тождественны, необходимо и достаточно, чтобы они ничем не различались друг от друга, кроме порядка их членов.*

Доказательство. Сначала докажем теорему для многочленов с одним переменным. Пусть нам дано тождество:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L \equiv Px^n + Qx^{n-1} + \ldots + Rx + S.$$

Предположим, что m не равно n; допустим, напр., что $m = n + 2$. Тогда можно написать:

$$Ax^{n+2} + Bx^{n+1} + Cx^n + \ldots + Kx + L \equiv Px^n + Qx^{n-1} + \ldots + Rx + S.$$

Если эти два многочлена равны друг другу при всяком значении x, то их разность тождественно равна нулю; значит;

$$Ax^{n+2} + Bx^{n+1} + (C - P)x^n + (D - Q)x^{n-1} + \ldots + (L - S) \equiv 0.$$

Для этого, согласно предыдущей теореме, необходимо и достаточно, чтобы $A = 0$, $B = 0$, $C = P$, $D = Q, \ldots L = S$. Но тогда эти многочлены ничем не различаются (кроме, быть может, порядка их членов).

Таким же путем можно доказать теорему и для нескольких переменных.

389. Однозначность алгебраического сложения, вычитания и умножения многочленов. Докажем однозначность для какого-нибудь одного из этих трех действий, напр., для умножения; для других действий можно повторить то же самое.

Положим, что умножая многочлены M и N по известному правилу умножения многочленов, мы получили некоторый многочлен P. Допустим теперь, что каким-нибудь другим путем можно получить еще иной многочлен P', также тождественно равный произведению MN. Так как оба многочлена P и P' тождественны одному и тому же произведению MN, то, очевидно, они должны быть тождественны и между собою, а для этого, согласно закону тождества, необходимо и достаточно, чтобы P и P' ничем друг от друга не различались (кроме порядка их членов), т. е чтобы эти многочлены представляли собою в сущности один и тот же много-

член. Значит, алгебраическое умножение есть действие однозначное.

То же рассуждение можно применить к сложению и вычитанию.

Докажем теперь и однозначность деления многочленов.

390. Однозначность алгебраического деления многочленов. *Под делением многочлена M на другой многочлен N в общем случае разумеют нахождение таких двух многочленов Q (частное) и R (остаток), которые удовлетворяли бы тождеству:*

$$M \equiv NQ + R,$$

причем степень остатка R была бы ниже степени делителя N. Если степень делителя N не выше степени делимого M, то такое деление возможно, как это видно из способа деления многочленов, указанного в § 70 (часть I). Если окажется, что R есть нуль, то это будет деление без остатка; и тогда деление есть действие (обратное умножению), посредством которого по данному произведению (делимому) и одному из сомножителей (делителю) отыскивается другой сомножитель (частное). Если же $R \neq 0$, то это будет деление с остатком (аналогичное делению с остатком одного целого числа на другое). Покажем теперь, что деление с остатком и деление без остатка суть действия однозначные.

Предположим, что помимо многочленов Q и R (найденных так, как это описано в § 70, ч. I) существуют еще многочлены Q' и R', также удовлетворяющие тождеству:

$$M \equiv NQ' + R'.$$

Тогда мы будем иметь тождество:

$$NQ + R \equiv NQ' + R',$$

откуда:

$$NQ - NQ' \equiv R' - R, \text{ т. е. } N(Q - Q') \equiv R' - R.$$

Последнее тождество возможно только тогда, когда многочлены Q' и R' не отличаются соответственно от многочленов Q и R. В самом деле, если бы многочлен Q' разнился от многочлена Q, то тогда левая часть последнего тождества, по раскрытии скобок, представляла бы собою некоторый многочлен степени не ниже степени N, тогда как правая часть этого тождества была бы многочленом степени ниже степени N (так как,

по определению деления, степень R и степень R' ниже степени N); а два многочлена разных степеней не могут быть тождественными, как это следует из закона тождества. Итак многочлены Q и Q' не могут быть различными; но тогда левая часть тождества равна нулю; потому и правая часть его равна нулю, следовательно и R не может разниться от R'. Таким образом, частное может быть только одно, и остаток может быть только один, т. е. деление есть тоже действие однозначное.

Заметим, что когда деление M на N совершается без остатка ($R=0$), то говорят просто, что M делится на N.

Глава вторая

Делимость многочлена, целого относительно x на разность $x-a$.

391. Теорема. *Многочлен, целый относительно x (и расположенный по убывающим степеням этой буквы)*

$$M = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + K$$

при делении на разность $x-a$ (где a есть произвольное число, положительное или отрицательное) *дает остаток*

$$R = Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \ldots + K,$$

равный тому значению делимого, которое оно получает при $x=a$.

Доказательство. Пусть от деления M на $x-a$ получается некоторое частное Q и некоторый остаток R. Так как, по определению деления, степень остатка R должна быть ниже степени делителя $x-a$, а этот делитель 1-й степени, то степень R должна равняться нулю, т. е. R не содержит в себе x. Заметив это, возьмем тождество:

$$M \equiv (x-a)\,Q + R,$$

которому, согласно определению деления, должны удовлетворять Q и R. Если это равенство есть тождество, то это значит, что оно верно при всевозможных значениях x, а потому оно должно быть верно и при $x=a$. Но при $x=a$ оно дает:

$$M' = (a-a)\,Q' + R,$$

если буквами M' и Q' обозначим те значения M и Q, которые эти многочлены принимают при $x=a$ (остаток R, как не содержащий вовсе x, не изменится от подстановки a на место x).

Так как при $x=a$ произведение $(x-a)\,Q$ обращается в $0\cdot Q'$, что равно 0, то последнее равенство дает: $M'=R$, т. е.

$$R=Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots+K,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Так как $x+a=x-(-a)$, то, применяя доказанную теорему к сумме $x+a$, найдем: *многочлен $Ax^m+Bx^{m-1}+$ $+Cx^{m-2}+\ldots+K$ при делении на сумму $x+a$ дает в остатке число, равное $A(-a)^m+B(-a)^{m-1}+\ldots+K$, т. е. число, равное тому значению делимого, которое оно получает при $x=-a$.*

Примеры. 1) Многочлен x^5-3x^2+5x-1 при делении на $x-2$ дает остаток, равный $2^5-3\cdot 2^2+5\cdot 2-1=29$.

2) Многочлен x^5-3x^2+5x-1 при делении на $x+2$ дает остаток: $(-2)^5-3(-2)^2+5(-2)+1=-53$.

392. Теорема. *Для того, чтобы многочлен $Ax^m+Bx^{m-1}+$ $+Cx^{m-2}+\ldots+K$ делился на разность $x-a$, необходимо и достаточно, чтобы при $x=a$ он обращался в нуль.*

Доказательство. Это необходимо, так как если указанный многочлен делится на $x-a$, то остаток от деления должен быть 0, а этот остаток по доказанному выше, есть то значение делимого, которое оно принимает при $x=a$. Это достаточно, так как если многочлен обращается в 0 при $x=a$, то это значит, что остаток от деления этого многочлена на $x-a$ равен 0.

Следствие. *Для того, чтобы многочлен $Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots$ $+K$ делился на сумму $x+a$, необходимо и достаточно, чтобы при $x=-a$ он обращался в* 0, так как сумма $x+a$ есть разность $x-(-a)$.

Примеры. 1) Многочлен x^3-4x^2+9 делится на $x-3$, потому что $3^3-4\cdot 3^2+9=0$.

2) Многочлен $2x^2+x-45$ делится на $x+5$, так как $2(-5)^2+(-5)-45=0$.

393. Теорема. *Зная один корень алгебраического уравнения:*

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+K=0,$$

мы можем понизить степень этого уравнения на 1.

Действительно допустим, что каким-нибудь путем (напр., просто догадкой) мы нашли один корень $x=a$. Это значит, что многочлен, стоящий в левой части уравнения, обращается в 0 при $x=a$. Но тогда этот многочлен делится на $x-a$. Сделав это деление, мы получим в частном некоторый многочлен Q

степени $m-1$. Теперь данное уравнение можно представить так:

$$Q(x-a)=0.$$

Это уравнение удовлетворяется только теми значениями x, при которых либо $x-a$ равно 0, либо Q равно 0. Приняв, что $x-a=0$, мы получим ранее найденный корень, если же допустим, что $Q=0$, то будем иметь уравнение, степень которого на 1 ниже степени данного уравнения.

394. Некоторые особые случаи деления двучленов. 1) *Разность одинаковых степеней двух чисел делится на разность тех же чисел,*

так как x^m-a^m при делении на $x-a$ дает остаток a^m-a^m, т. е. 0.

2) *Сумма одинаковых степеней двух чисел не делится на разность этих чисел,*

так как x^m+a^m при делении на $x-a$ дает остаток $a^m+a^m=2a^m$, а не 0.

3) *Разность одинаковых четных степеней двух чисел делится, а нечетных не делится на сумму этих чисел,*

так как при делении разности x^m-a^m на $x+a$ остаток равен $(-a)^m-a^m$, что при m четном равно нулю, а при m нечетном составляет $-2a^m$.

4) *Сумма одинаковых нечетных степеней двух чисел делится, а четных не делится на сумму этих чисел,*
так как при делении суммы x^m+a^m на $x+a$ остаток равен $(-a)^m+a^m$, что при m нечетном равно 0, а при m четном составляет $2a^m$.

Примеры. 1) x^1+a^1 делится на $x+a$, но не делится на $x-a$;

2) x^2-a^2 делится и на $x-a$, и на $x+a$;

3) x^2+a^2 не делится ни на $x-a$, ни на $x+a$.

4) x^3-a^3 делится на $x-a$, но не делится на $x+a$;

5) x^3+a^3 делится на $x+a$, но не делится на $x-a$.

Замечание. Разность x^m-a^m при m четном делится и на $x-a$, и на $x+a$; в таком случае эта разность должна делиться на произведение $(x-a)(x+a)$, т. е. на x^2-a^2. И действительно, представив разность $x^{2n}-y^{2n}$ в таком виде: $(x^2)^n-(a^2)^n$, мы замечаем, что это есть разность одинаковых степеней чисел x^2 и c^2; следовательно, она должна делиться на разность этих чисел, т. е. на x^2-a^2. Так,

$$x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)(x^2 + a^2), \quad x^6 - a^6 = (x^2 - a^2)(x^4 + a^2x^2 + a^4),$$
и т. п.

395. Частные, получаемые при делении $x^m \mp a^m$ на $x \mp a$. Из рассмотрения процесса деления:

$$x^m - a^m \quad \Big| \; \dfrac{x - a}{x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1}}$$

$$\underline{\;\text{„} + ax^{m-1}}$$
1-й ост. . . . . $ax^{m-1} - a^m$
$$\underline{\;\text{„} + a^2x^{m-2}}$$
2-й ост. . . . . $a^2x^{m-2} - a^m$
$$\underline{\;\text{„} + a^3x^{m-3}}$$
3-й ост. . . . . $a^3x^{m-3} - a^m$

. . . .

(m-1)-й ост. . . $a^{m-1}x - a^m$

m-й ост. . . . $a^m - a^m = 0$.

замечаем, что многочлен, получившийся в частном, содержит m членов; сумма показателей в каждом члене при a и x одна и та же, именно $m-1$; показатели x идут, уменьшаясь на 1, от $m-1$ до 0, показатели же a идут, увеличиваясь на 1, от 0 до $m-1$; коэффициенты у всех членов равны 1; знаки все $+$; число членов в частном m.

Заметив это, можем прямо писать:

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2);$$
$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3);$$
$$x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4);$$
и т. п.

Чтобы получить частное от деления $x^m - a^m$ на $x + a$ при m четном или при делении $x^m + a^m$ на $x + a$ при m нечетном, достаточно в полученном выше частном заменить a на $-a$. Таким образом:

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2);$$
$$x^4 - a^4 = (x + a)(x^3 - ax^2 + a^2x - a^3);$$
$$x^5 + a^5 = (x + a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4);$$
и т. п.

Глава третья.

Общие формулы решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

396. Общие формулы. Систему 2 уравнений 1 степени с 2 неизвестными мы можем в общем виде изобразить так (ч. 1, § 138):

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'.$$

Решим эту систему, предполагая, что ни один из 4 коэффициентов a, b, a', b' не равен нулю. Применим, например, способ сложения или вычитания.

Умножив члены первого уравнения на b', а члены второго на b, вычтем второе уравнение из первого:

$$\begin{array}{r} ab'x + bb'y = cb' \\ -a'bx - bb'y = -c'b \\ \hline (ab' - a'b)x = cb' - c'b' \end{array} \qquad x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}.$$

Умножив члены первого уравнения на a', а второго на a вычтем уравнения почленно:

$$\begin{array}{r} aa'x + ba'y = ca' \\ -aa'x - b'ay = -c'a \\ \hline (ba' - b'a)\, y = ca' - c'a \end{array} \qquad y = \frac{ca' - c'a}{ba' - b'a}.$$

Знаменателей обеих формул можно сделать одинаковыми, если оба члена дроби, полученной для y, умножим на -1; тогда получим следующие общие формулы:

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \qquad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Полезно запомнить, как можно составить формулы для неизвестных, не прибегая каждый раз к их выводу. Знаменатель $ab' - a'b$, одинаковый для обеих формул, составлен из коэффициентов:

$$\begin{matrix} a \\ a' \end{matrix} >< \begin{matrix} b \\ b' \end{matrix}$$

перемножением их крест-накрест, причем одно произведение взято с $+$, другое с $-$. Числители формул получаются из знаменателя заменою в нем коэффициентов определяемого неизвестного соответственно свободными членами c и c'. Чтобы получить, например, числителя формулы x, надо в знаменателе $ab' - a'b$ заменить иксовы коэффициенты a и a' соответственно на c и c'; от этого получим: $cb' - c'b$.

397. Исследование общих формул. Рассмотрим особо следующие 2 случая:

I. Общий знаменатель $ab' - a'b$ не равен нулю. В этом случае для каждого неизвестного получается единственное решение, которое может быть положительным, отрицательным и равным нулю. О значении этих решений здесь может быть сказано то же самое, что говорилось при исследовании одного уравнения с одним неизвестным (ч. I, §§ 126, 127 и 128).

II. Общий знаменатель $ab' - a'b$ равен нулю.

Докажем, что тогда:

а) Если одно неизвестное представляется под видом $\frac{0}{0}$, то и другое неизвестное представляется под тем же видом.

Пусть, например, $x=\frac{0}{0}$. Для этого нужно, чтобы

$$cb'=c'b$$
$$ab'=a'b.$$

Перемножив эти два равенства крест-накрест, найдем: $cb'a'b=c'bab'$; откуда: $cb'a'b-c'bab'=0$, или $bb'(a'c-ac')=0$.

Так как числа b и b', по предположению, не равны нулю, то последнее равенство возможно только тогда, когда $a'c-ac'=0$; но тогда и $y=\frac{0}{0}$.

Также, если допустим, что $y=\frac{0}{0}$, т. е. $ac'=a'c$ и $ab'=a'b$, то, перемножив эти равенства крест-накрест найдем: $ac'a'b=a'cab'$, откуда $aa'(c'b-cb')=0$. Так как числа a и a' мы предположили не равными 0, то последнее равенство дает: $c'b-cb'=0$, а тогда и $x=\frac{0}{0}$.

б) Если одно неизвестное представляется под видом $\frac{m}{0}$, где $m\neq 0$, то и другое неизвестное представляется под видом $\frac{n}{0}$, где $n\neq 0$. Действительно, если бы оно приняло вид $\frac{0}{0}$, то и первое неизвестное, по доказанному, имело бы тот же вид, а мы предположили, что этого нет.

Решения: $x=\frac{0}{0}$ и $y=\frac{0}{0}$ означают неопределенность задачи.

Действительно, умножив все члены первого уравнения на b', а члены второго на b (что можно сделать, так как числа b и b', по предположению, не равны 0), получим:

$$ab'x+bb'y=cb'$$
$$a'bx+b'by=c'b.$$

Если $x=\frac{0}{0}$ и $y=\frac{0}{0}$, то $ab'=a'b$, $cb'=c'b$; тогда эти два уравнения представляют собою одно уравнение с 2 неизвестными; а в этом случае неизвестные могут иметь бесчисленное множество значений.

Решения: $x=\frac{m}{0}$ и $y=\frac{n}{0}$ означают несовместность уравнений. В самом деле, если $ab'=a'b$, а $cb'\neq c'b$, то левые части послед-

них уравнений имеют одинаковые численные величины, а правые — разные; значит, эти уравнения несовместны, и задача невозможна.

Из сказанного заключаем: система двух уравнений первой степени с 2 неизвестными допускает или одно определенное решение, или бесчисленное множество решений, или же ни одного решения.

398. Случай, когда некоторые из коэффициентов равны нулю. В этом случае не следует полагаться на общие формулы (выведенные в предположении, что ни один из коэффициентов a, b, a' и b' не равен нулю), а должно подвергать каждый случай особому исследованию. Положим, например, что оба коэффициента при одном и том же неизвестном равны нулю. Пусть $b = b' = 0$; тогда $ab' - a'b = 0$ и $cb' - c'b = 0$, и общие формулы дают $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{m}{0}$ или $\frac{0}{0}$, смотря по тому, будет ли ac' не равно или равно $a'c$. Уравнения же в этом случае дают:

$$\begin{cases} ax + 0 \cdot y = c \\ a'x + 0 \cdot y = c' \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} x = \frac{c}{a} \\ x = \frac{c'}{a'} \end{cases}$$

Если ac' не равно $a'c$, то $\frac{c}{a}$ не равно $\frac{c'}{a'}$, и уравнения невозможны, потому что для x получаются два различные значения; между тем в этом случае формулы для неизвестных дают $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{m}{0}$. Если же $ac' = a'c$, то $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$, тогда для x получается определенное решение, а y может иметь всевозможные значения, хотя общие формулы в этом случае дают $x = \frac{0}{0}$ и $y = \frac{0}{0}$.

Глава четвертая.

Извлечение квадратного корня из многочлена.

399. Объяснение. В некоторых случаях квадратный корень из многочлена может быть выражен в виде многочлена (в виде одночлена он не может быть выражен, так как одночлен в квадрате дает одночлен, а не многочлен). Покажем это на следующем примере:

$$\sqrt{16a^4b^2 - 24a^3b^3 + 13a^2b^4 - 3ab^5 + {}^1/_4b^6}.$$

Мы расположили данный многочлен по убывающим степеням буквы a, так что высший член в нем есть первый, а низший — последний.

Предположим, что существует многочлен, квадрат которого равен данному многочлену. Пусть этот многочлен тоже расположен по убывающим степеням буквы a, так что высший член в нем первый.

Мы видели (ч. I, § 155), что квадрат многочлена = квадрату 1-го члена + удвоенное произведение 1-го члена на 2-й + квадрат 2-го члена + удвоенное произведение суммы первых двух членов на 3-й + квадрат 3-го члена, и т. д. Если возвышаемый многочлен расположен по убывающим степеням главной буквы, то очевидно, что высший член в квадрате этого многочлена есть квадрат первого его члена. В подкоренном многочлене высший член есть $16a^4b^2$; значит, это и есть квадрат 1-го члена искомого многочлена; поэтому 1-й член корня $= \sqrt{16a^4b^2} = \pm 4a^2b$. Таким образом: **чтобы найти первый член корня, достаточно извлечь квадратный корень из первого члена подкоренного многочлена** (предварительно расположенного.).

Из найденных двух значений первого члена возьмем пока одно: $+4a^2b$, а впоследствии примем во внимание и другое.

$$\sqrt{16a^4b^2 - 24a^3b^3 + 13a^2b^4 - 3ab^5 + \tfrac{1}{4}b^6} = 4a^2b - 3ab^2 + \tfrac{1}{2}b^3.$$

$$-16a^4b^2$$

$8a^2b - 3ab^2$	» $-24a^3b^3 + 13a^2b^4$	
$-3ab^2$	» $+24a^3b^3 - 9a^2b^4$	. . . . первый остаток
$8a^2b - 6ab^2 + \frac{1}{2}b^3$	» $+4a^2b^4 - 3ab^5 + \frac{1}{4}b^6$	
$\frac{1}{2}b^3$	» $-4a^2b^4 + 3ab^5 - \frac{1}{4}b^6$	. . . . второй остаток
	$0.$	

Найдя первый член корня ($4a^2b$), возвысим его в квадрат и вычтем из подкоренного многочлена. В остатке (первом) должны получиться все члены многочлена, кроме первого. Мы написали только 2 члена остатка, потому что остальные пока не нужны. В этом первом остатке должны содержаться: удвоенное произведение 1-го члена на 2-й + квадрат второго члена + удвоенное произведение суммы первых двух членов на 3-й + квадрат 3-го, и т. д. Из всех этих членов высшим будет удвоенное произведение 1-го члена на 2-ой, а в остатке высший член есть $-24a^3b^3$; следовательно $-24a^3b^3$ и есть удвоенное произве-

дение 1-го члена на 2-й. А потому: **чтобы найти 2-й член корня, достаточно разделить первый член первого остатка на удвоенный первый член корня**...

Для этого налево от остатка (или направо от него) проводим вертикальную черту, за нею пишем удвоенный первый член корня ($8a^2b$). Разделив $-24a^3b^3$ на $8a^2b$, получаем одночлен $-3ab^2$, который и записываем в корне на месте второго члена, и вместе с тем приписываем его за вертикальной чертой к удвоенному первому члену (получаем за чертой $8a^2b - 3ab^2$). Это делается для того, чтобы, умножив $8a^2b - 3ab^2$ на $-3ab^2$, зараз получить: удвоенное произведение 1-го члена на 2-й и квадрат 2-го члена. Умножив на самом деле $8a^2b - 3ab^2$ на $-3ab^2$, пишем произведение под остатком и из него вычитаем (для чего переменяем знаки у вычитаемого многочлена на противоположные); получаем второй остаток $+4a^2b^4 - 3ab^5 + {}^1/_4b^6$.

Во втором остатке должны содержаться: удвоенное произведение суммы первых двух членов корня на 3-й член + квадрат 3-го члена, и т. д.; другими словами: удвоенное произведение 1-го члена на 3-й + удвоенное произведение 2-го члена на 3-й + квадрат 3-го члена, и т. д. Изо всех этих членов высший есть удвоенное произведение 1-го члена на 3-й; а в остатке высший член есть $+4a^2b^4$. Значит, $4a^2b^4$ и есть удвоенное произведение 1-го члена корня на 3-й его член. Поэтому: **чтобы найти 3-й член корня, достаточно разделить первый член второго остатка на удвоенный 1-й член корня.**

Пишем $8a^2b$ за вертикальною чертою и делим на это выражение $4a^2b^4$; получаем $+{}^1/_2b^3$; пишем этот результат в корне на месте 3-го члена. Теперь нам нужно составить удвоенное произведение 1-го члена на 3-й + удвоенное произведение 2-го члена на 3-й + квадрат 3-го члена и полученную сумму вычесть из второго остатка. Чтобы удобнее найти эту сумму, к удвоенному 1-му члену приписываем (за вертикальной чертой) удвоенный 2-й член и еще 3-й член корня (получаем $8a^2b - 6ab^2 + {}^1/_2b^3$) и образовавшийся от этого многочлен умножаем на 3-й член, т. е. на ${}^1/_2b^3$; полученное произведение подписываем под остатком и из него вычитаем (для чего переменяем знаки у вычитаемого многочлена).

В нашем примере 3-й остаток оказался 0; если бы получился остаток, не равный 0, то мы продолжали бы действие далее, рассуждая так, как и раньше.

Для первого члена искомого корня мы взяли лишь одно значение $\sqrt{16a^4b^2}$, именно $+4a^2b$; но мы могли бы также взять и: $-4a^2b$; в этом случае остальные члены корня тоже переменили бы знаки на противоположные, потому что для получения их пришлось бы делить первые члены остатков не на $8a^2b$, а на $-8a^2b$. Значит, квадратный корень из многочлена имеет два значения; в нашем примере одно $=4a^2b-3ab^2+{}^1/_2b^3$, другое $=-4a^2b+3ab^2-{}^1/_2b^3$, оба эти значения можно выразить так:

$$\pm(4a^2b-3ab^2+{}^1/_2b^3).$$

Мы могли бы подкоренной многочлен расположить по возрастающим степеням главной буквы; члены корня нашлись бы тогда совершенно так же, как сейчас было объяснено; только в объяснении слово „высший“ должно заменить словом „низший“.

400. Правило. Чтобы извлечь квадратный корень из многочлена, предварительно располагают его по убывающим или по возрастающим степеням одной и той же буквы.

Извлекают квадратный корень из 1-го члена многочлена; полученный результат берут за 1-й член корня.

Возвысив этот член в квадрат, вычитают его из данного многочлена.

Делят 1-й член первого остатка на удвоенный первый член корня; полученное частное берут за 2-й член корня.

Приписав этот член к удвоенному 1-му члену корня, умножают полученный двучлен на 2-й член корня и произведение вычитают из остатка.

Делят 1-й член 2-го остатка на удвоенный 1-й член корня; полученное частное принимают за 3-й член корня.

Приписав этот член к сумме удвоенного 1-го члена и удвоенного 2-го члена, умножают полученный трехчлен на 3-й член корня и произведение вычитают из 2-го остатка.

Продолжают действие так же и далее.

401. Признаки невозможности извлечения. 1) Если данный многочлен есть двучлен, то корень квадратный из него не может быть выражен многочленом, так как всякий многочлен в квадрате дает по меньшей мере 3 члена, а не 2.

2) Если высший или низший члены многочлена не представляют собою точных квадратов, то корень квадратный из многочлена не может быть выражен многочленом.

Это прямо следует из правила нахождения высшего и низшего членов корня.

3) Если высший и низший члены многочлена — точные квадраты, то возможность или невозможность извлечения корня обнаружится посредством самого действия; при этом если многочлен расположен по убывающим степеням главной буквы, то продолжают действие до тех пор, пока в остатке не получится 0, или пока не получится остаток, у которого первый член не делится на удвоенный первый член корня; в последнем случае извлечение невозможно. Если же многочлен расположен по возрастающим степеням главной буквы, то, вычислив предварительно последний член корня (который равен корню квадратному из последнего члена многочлена), продолжают действие до тех пор, пока в корне не получится член, у которого показатель главной буквы равен показателю этой буквы в вычисленном последнем члене корня, или более его; если при этом есть остаток, то извлечение невозможно.

402. Замечание. Когда из данного многочлена нельзя извлечь точного квадратного корня, все-таки иногда бывает полезно начать извлечение с тем, чтобы, прекратив его на каком-нибудь члене корня, *представить данный многочлен в виде суммы квадрата с остатком от извлечения.* Например:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\sqrt{x^4 - 4x^3 + 3} = x^2 - 2x} \\ \multicolumn{2}{l}{-x^4} \\ 2x^2 - 2x & -4x^3 + 3 \\ -2x & +4x^3 - 4x^2 \\ & \quad -4x^2 + 3. \end{array}$$

Положим, что мы прекратили извлечение на втором члене корня. Получившийся при этом остаток произошел от вычитания из подкоренного многочлена всех членов, которые получаются от возвышения в квадрат найденного двухчлена $x^2 - 2x$; значит:

$$(x^4 - 4x^3 + 3) - (x^2 - 2x)^2 = -4x^2 + 3;$$

следовательно,

$$x^4 - 4x^3 + 3 = (x^2 - 2x)^2 + (-4x^2 + 3) = (x^2 - 2x)^2 - 4x^2 + 3.$$

Глава пятая.

Преобразование сложного радикала.

$\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

403. Корни биквадратного уравнения, как мы видели (ч. I, § 229), выражаются под видом сложных радикалов $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. Такие

радикалы в некоторых случаях возможно преобразовать в сумму или разность двух простых радикалов и тем упростить их вычисление и определение степени погрешности результата. Покажем, как и при каких условиях это можно сделать.

Пусть в сложном радикале $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ числа A и B будут рациональные, причем $\sqrt{B}$ число вещественное иррациональное (и, следовательно, B число положительное). Предположим, что возможно равенство:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$$

в котором числа x и y положительные рациональные. Возвысив обе части этого равенства в квадрат, получим:

$$A+\sqrt{B}=x+y+2\sqrt{xy}=x+y+\sqrt{4xy}.$$

Откуда:

$$\sqrt{4xy}=(A-x-y)+\sqrt{B}$$

и следовательно,

$$4xy=(A-x-y)^2+B+2(A-x-y)\sqrt{B}.$$

Левая часть этого уравнения есть число рациональное; значит, и правая часть должна быть числом рациональным. Но это возможно только тогда, когда коэффициент при $\sqrt{B}$ будет равен нулю. Положив

$$A-x-y=0, \text{ находим: } x+y=A; \text{ тогда } 4xy=B,$$

или:

$$x+y=A,\ xy=\frac{B}{4}.$$

Из этих равенств видно, что x и y можно рассматривать, как корни такого квадратного уравнения, у которого коэффициент при неизвестном во 2-й степени есть 1, коэффициент при неизвестном в 1-й степени есть $-A$, а свободный член равен $\frac{B}{4}$ (ч. I, § 219). Значит, решив уравнение:

$$z^2-Az+\frac{B}{4}=0,$$

найдем x и y:

$$x=z_1=\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}-\frac{B}{4}}=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}.$$

$$y=z_2=\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A^2}{4}-\frac{B}{4}}=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Отсюда видно, что радикал $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ можно представить в виде суммы двух простых радикалов только тогда, когда A есть число положительное и A^2-B есть точный квадрат.

Подобным же образом выведем, что при тех же условиях

и при $A \geqslant \sqrt{B}$:

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Примеры.

1) $$\sqrt{10+\sqrt{51}}=\sqrt{\frac{10+\sqrt{10^2-51}}{2}}+\sqrt{\frac{10-\sqrt{10^2-51}}{2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{10+7}{2}}+\sqrt{\frac{10-7}{2}}=\frac{\sqrt{34}+\sqrt{6}}{2}=\frac{5,830+2,449}{2}=4,139.$$

2) $$\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{8-\sqrt{60}}=\sqrt{\frac{8+2}{2}}-\sqrt{\frac{8-2}{2}}=$$
$$=\sqrt{5}-\sqrt{3}=2,236-1,732=0,504.$$

3) $$\sqrt{\frac{9}{11}+\frac{4}{11}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{9+\sqrt{32}}}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{\frac{9+7}{2}}+\sqrt{\frac{9-7}{2}}}{\sqrt{11}}=$$
$$=\frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{88}+\sqrt{11}}{11}=\frac{9,381+3,317}{11}=1,154.$$

4) $$a_{2n}=\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-\frac{a_n^2}{4}}}=\sqrt{2r^2-\sqrt{4r^4-a_n^2r^2}}.$$

(Известная геометрическая формула удвоения числа сторон правильного вписанного многоугольника). Здесь:

$$A=2r^2,\ B=4r^4-a_n^2r^2;\ \sqrt{A^2-B}=a_nr;$$

поэтому:

$$a_{2n}=\sqrt{\frac{2r^2+a_nr}{2}}-\sqrt{\frac{2r^2-a_nr}{2}}=\sqrt{r\left(r+\frac{a_n}{2}\right)}-\sqrt{r\left(r-\frac{a_n}{2}\right)}.$$

Глава шестая

Дополнительные сведения о неравенствах.

404. Два рода вопросов относительно неравенств. Относительно неравенств (как и равенств), содержащих буквы, могут быть предлагаемы вопросы двоякого рода:

1) решить неравенство, содержащее неизвестные, т. е. определить, между какими пределами должны заключаться численные значения неизвестных, чтобы оно было верно, т. е. больше чего или меньше чего должны быть эти значения неизвестных;

2) доказать тождественное неравенство, т. е. обнаружить верность его при всевозможных значениях букв, или, по крайней мере, при значениях, ограниченных заданными наперед условиями.

Решение обоих вопросов основывается на некоторых свойствах неравенств, подобных тем, которые служат основанием для решения уравнений.

405. Равносильные неравенства. Неравенства, содержащие одни и те же неизвестные, называются равносильными, если они удовлетворяются одними и теми же значениями этих неизвестных; так, 2 неравенства $3x+2<x+10$ и $3x<x+8$ равносильны, так как оба они удовлетворяются значениями x, меньшими 4, и только этими значениями.

Относительно равносильности неравенств докажем теоремы, весьма сходные с подобными же теоремами относительно равносильности уравнений.

406. Теорема 1. *Если к обеим частям неравенства (содержащего неизвестные) прибавим (или отнимем) одно и то же число, то получим новое неравенство, равносильное первому.*

Обозначим левую часть неравенства, содержащего неизвестные, одною буквою A и правую часть — другою буквою B, и пусть m есть какое угодно число; докажем, что два неравенства:

$$A>B \qquad (1)$$
$$A+m>B+m \qquad (2)$$

равносильны. Положим, что первое неравенство удовлетворяется при некоторых значениях букв. Это значит, что при этих значениях численная величина A делается больше численной величины B; но тогда при тех же значениях букв и численная величина суммы $A+m$ сделается больше численной величины

суммы $B+m$, так как если к обеим частям неравенства придадим поровну, то знак неравенства не изменится. Значит, всякое решение неравенства (1) принадлежит и неравенству (2).

Обратно, если при некоторых значениях букв численная величина суммы $A+m$ делается больше численной величины суммы $B+m$, то для тех же значений букв и численная величина A сделается больше численной величины B (если от обеих частей неравенства отнимем поровну, то...); следовательно, все решения неравенства (2) удовлетворяют и неравенству (1); значит, эти неравенства равносильны.

Переходя от неравенства (2) к неравенству (1), мы замечаем, что от обеих частей неравенства можно отнять одно и то же число.

Замечание. Число, прибавляемое к обеим частям неравенства или отнимаемое от них, может быть дано в виде какого-нибудь буквенного выражения, причем выражение это может содержать в себе и неизвестные, входящие в неравенство; нужно только, чтобы прибавляемое выражение при всех значениях неизвестных, удовлетворяющих данному неравенству, представляло собою определенное число (а не принимало бы, например, вида $\frac{0}{0}$, или ∞).

Следствие. *Любой член неравенства можно перенести из одной части в другую с противоположным знаком.*

Если, например, имеем неравенство: $A>B+C$, то, отняв от обеих частей по C, получим: $A-C>B$.

407. Теорема 2. *Если обе части неравенства (содержащего неизвестные) умножим (или разделим) на одно и то же положительное число, то получим новое неравенство, равносильное первому.*

Докажем, что два неравенства:

$$A>B \tag{1}$$

и

$$Am>Bm \tag{2}$$

равносильны, если только m положительное число.

Пусть при некоторых значениях неизвестных численная величина A делается больше численной величины B; тогда при тех же значениях неизвестных и численная величина произведения Am сделается больше численной величины произведения Bm, так как от умножения обеих частей неравенства на поло-

жительное число, как мы знаем, знак неравенства не изменяется. Значит, все решения неравенства (1) удовлетворяют и неравенству (2).

Обратно, если при некоторых значениях букв численная величина Am делается больше численной величины Bm, то при тех же значениях букв и численная величина A сделается больше численной величины B, так как от деления обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства не изменяется.

Замечание. Положительное число, на которое, по доказанному, мы имеем право умножить или разделить обе части неравенства (не изменяя его знака), может быть дано в виде буквенного выражения, причем это выражение может содержать в себе и неизвестные, входящие в неравенство. Но при этом надо особо рассмотреть, при всех ли значениях букв, входящих в выражение, на которое мы умножаем или делим обе части неравенства, это выражение остается положительным числом.

Например, умножим обе части неравенства $A > B$ на выражение $(x-5)^2$:

$$A > B \qquad (1)$$

$$A(x-5)^2 > B(x-5)^2. \qquad (2)$$

Множитель $(x-5)^2$ остается положительным числом при всех значениях x, кроме одного: $x=5$. Значит, неравенства (1) и (2) равносильны в том случае, если первое из них не удовлетворяется значением $x=5$; в противном же случае неравенство (1), удовлетворяясь всеми решениями неравенства (2), имеет еще свое особое решение: $x=5$ (это решение, конечно, неравенству (2) не удовлетворяет).

Следствие. *Если обе части неравенства содержат положительный общий множитель, то на него можно сократить неравенство.* Например, в обеих частях неравенства:

$$(x-5)^2(x-1) > (x-5)^2(3-x)$$

есть общий множитель $(x-5)^2$. Этот множитель при $x=5$ обращается в 0, а при всех остальных значениях x он есть число положительное. Решение $x=5$ не удовлетворяет данному неравенству. Желая решить, удовлетворяется ли оно при других значениях x, мы можем сократить обе части неравенства на $(x-5)^2$ как на число положительное; после сокращения полу-

чим: $x-1>3-x$. Все значения x, удовлетворяющие этому неравенству, за исключением $x=5$, удовлетворяют и данному неравенству.

408. Теорема 3. *Если обе части неравенства (содержащего неизвестные) умножим (или разделим) на одно и то же отрицательное число и при этом переменим знак неравенства на противоположный, то получим новое неравенство равносильное первому.*

Эта теорема доказывается совершенно так же, как и теорема 2-я; надо только принять во внимание, что от умножения или деления обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства изменяется на противоположный.

По поводу этой теоремы можно высказать такое же замечание, какое было сделано по отношению к теореме 2-й.

Следствия. а) Переменив у всех членов неравенства знаки на противоположные (т. е. умножив обе его части на -1), мы должны изменить знак неравенства на противоположный.

б) Нельзя умножить обе части неравенства на буквенного множителя, знак которого неизвестен.

в) Неравенство с дробными членами можно привести к целому виду. Возьмем, например, такое неравенство:

$$\frac{A}{B}>\frac{C}{D}. \qquad (1)$$

Перенесем все члены в левую часть и приведем их к общему знаменателю:

$$\frac{AD-BC}{BD}>0. \qquad (2)$$

Если BD положительное число, то мы можем его отбросить, не изменяя знака неравенства, потому что отбросить BD все равно, что умножить на это число обе части неравенства. Отбросив BD, получим неравенство, не содержащее дробей:

$$AD-BC>0.$$

Если BD отрицательное число, то мы можем его отбросить, переменив при этом знак неравенства на противоположный; тогда снова будем иметь неравенство с целыми членами:

$$AD-BC<0.$$

Но если знак BD неизвестен (что бывает вообще тогда, когда B и D содержат неизвестные), то мы не можем умножать обе

части неравенства на BD. Тогда рассуждаем так: чтобы дробь была положительна, необходимо и достаточно, чтобы у нее числитель и знаменатель были одновременно или положительны, или отрицательны. Следовательно, неравенство (2) удовлетворится при таких значениях букв, при которых,

$$\begin{cases} AD - BC > 0 \\ BD > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} AD - BC < 0. \\ BD < 0. \end{cases}$$

Таким образом, решение неравенства (1) сводится к решению системы двух неравенств, не содержащих знаменателей.

409. Доказательство неравенства. Нельзя установить каких-либо общих правил для обнаружения верности предложенного неравенства. Заметим только, что один из приемов состоит в том, что предложенное неравенство преобразовывают в другое, очевидное, и затем, исходя из этого очевидного неравенства, путем логических рассуждений доходят до предложенного. Приведем некоторые примеры.

I. *Доказать, что среднее арифметическое двух неравных положительных чисел больше их среднего геометрического*, т. е. что

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab},$$

если a и b положительные числа, неравные друг другу.

Предположим, что доказываемое неравенство верно. В таком случае будут верны и следующие неравенства:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > \left(\sqrt{ab}\right)^2; \ \frac{a^2+2ab+b^2}{4} > ab; \ a^2+2ab+b^2 > 4ab;$$
$$a^2-2ab+b^2 > 0; \ (a-b)^2 > 0.$$

Очевидно, что последнее неравенство верно для всяких неравных значений a и b, как положительных, так и отрицательных. Из этого, однако, нельзя еще сразу заключить, что и доказываемое неравенство верно; надо еще убедиться, что из последнего неравенства можно получить, как следствия, все предыдущие. Просматривая эти неравенства от последнего к первому, видим, что все они равносильны друг другу, если добавить ограничение, что буквы a и b должны теперь означать только положительные числа, так как если одна из этих букв — отрицательное число, то $\sqrt{ab}$ будет мнимое число, а если обе буквы — отрицательные числа, то $\frac{a+b}{2}$ будет отрицатель-

ное число, а $\sqrt{ab}$ — число положительное, а отрицательное число не может быть больше положительного[1]).

Если допустим, что $a = b$, то тогда в написанных выше неравенствах знак $>$ изменится на знак $=$ и мы придем к заключению, что среднее арифметическое двух равных положительных чисел равно их среднему геометрическому.

II. *Доказать, что величина дроби*

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n}$$

заключается между большею и меньшею из дробей:

$$\frac{a_1}{b_1}, \ \frac{a_2}{b_2}, \ \frac{a_3}{b_3}, \ldots \frac{a_n}{b_n},$$

если все знаменатели $a_1, b_2 \cdots$ — *числа положительные или все отрицательные.*

Пусть $\frac{a_1}{b_1}$ будет дробь, которая не больше никакой из остальных дробей, и $\frac{a_n}{b_n}$ — дробь, которая не меньше никакой из остальных дробей. Положим, что $\frac{a_1}{b_1} = q_1$ и $\frac{a_n}{b_n} = q_n$. Тогда, согласно предположению:

$$\frac{a_1}{b_1} = q_1, \ \frac{a_2}{b_2} \geqslant q_1, \ \frac{a_3}{b_3} \geqslant q_1, \ \cdots \frac{a_n}{b_n} \geqslant q_1,$$

$$\frac{a_n}{b_n} = q_n, \ \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \leqslant q_n \cdots \frac{a_2}{b_2} \leqslant q_n, \ \frac{a_1}{b_1} \leqslant q_n.$$

Отсюда, если числа $b_1, b_2 \cdots b_n$ положительные:

$$a_1 = b_1 q_1, \ a_2 \geqslant b_2 q_1, \ a_3 \geqslant b_3 q_1 \cdots a_n \geqslant b_n q_1$$

и

$$a_n = b_n q_n, \ a_{n-1} \leqslant b_{n-1} q_n \cdots a_2 \leqslant b_2 q_n, \ a_1 \leqslant b_1 q_n.$$

---

[1]) Полезно заметить, что предложенное неравенство становится наглядным, если придадим ему геометрический смысл. На произвольной прямой отложим отрезок AB, содержащий a линейных единиц, и в том же направлении — отрезок BC, содержащий b таких же линейных единиц. На отрезке AC, равном $a + b$, построим, как на диаметре, полуокружность и из B восставим к AC перпендикуляр BD до пересечения с полуокружностью. Тогда, как известно из геометрии, BD есть средняя геометрическая между AB и BC, т. е. $BD = \sqrt{ab}$ средняя арифметическая AB и BC равна, очевидно, радиусу. Так как хорда меньше диаметра, то BD меньше радиуса, если только BD не совпадает с радиусом, т. е. если $a \neq b$.

Сложив почленно все неравенства 1-й строки между собою и все неравенства 2-й строки между собою, получим:

$$a_1 + a_2 + a_3 \cdots + a_n \geqslant (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)q_1$$

и

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leqslant (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)q_n.$$

Разделив обе части этих неравенств на положительное число $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$, окончательно найдем:

$$q_n \geqslant \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n} \geqslant q_1,$$

что и требовалось доказать.

Так же доказывается предложение для того случая, когда все знаменатели числа отрицательные.

III. *Доказать, что если сумма переменных чисел x и y остается постоянной, то их произведение будет наибольшее при равенстве этих чисел.*

Пусть $x + y = a$, где a постоянное число. Если $x = y$, то каждое из этих чисел будет $\frac{a}{2}$ и тогда xy сделается равным $\frac{a^2}{4}$.

Требуется доказать, что если $x \neq y$, то $xy < \frac{a^2}{4}$. Преобразуем это доказываемое неравенство так:

$$xy < \frac{a^2}{4};\quad 4xy < a^2;\quad 4xy < (x + y)^2;$$
$$4xy < x^2 + 2xy + y^2;\quad 0 < x^2 - 2xy + y^2;$$
$$0 < (x - y)^2.$$

При неравных x и y последнее неравенство, очевидно, верно. Переходя от него последовательно к предыдущим неравенствам, замечаем, что все они равносильны. Значит, и первое неравенство верно.

Если, напр., $x + y = 10$, то наибольшая величина произведения есть $5 \cdot 5 = 25$.

Глава седьмая.

Понятие о комплексных числах.

410. Цель введения в алгебру мнимых чисел. Корень четной степени из отрицательного числа, как мы видели (ч. I, § 167), не может быть выражен ни положительным, ни отрицательным числом; такой корень называется мнимым числом.

Введение в алгебру мнимых чисел вызвано соображениями, подобными тем, по которым в нее допущены отрицательные числа: и те, и другие имеют целью обобщить некоторые алгебраические предложения и формулы. Напр., допустив мнимые числа, мы можем принимать, что квадратное уравнение имеет всегда два корня, что трехчлен 2-й степени разлагается всегда на два множителя первой степени, и т. п. Особенно важное значение имеют мнимые числа в теории уравнений высших степеней.

Заметим, что корень всякой четной степени из отрицательного числа сводится к нахождению корня из квадратного корня из отрицательного числа; так, $\sqrt[6]{-2}=\sqrt[3]{\sqrt{-2}}$ и вообще $\sqrt[2n]{-a}=$ $=\sqrt[n]{\sqrt{-a}}$. Поэтому в дальнейшем изложении мы будем говорить только о квадратном корне из отрицательного числа.

411. Условия, под которыми вводят мнимые числа. Этих условий два:

1) согласились рассматривать $\sqrt{-a}$, где $-a$ есть какое угодно отрицательное число, как число особого рода, квадрат которого равен $-a$;

2) согласились производить над мнимыми числами действия и преобразования по тем же правилам, по каким они производятся над числами вещественными, принимая всегда, что $(\sqrt{-a})^2=-a$.

412. Приведение $\sqrt{-a}$ к виду $\sqrt{a}\sqrt{-1}$. Мнимое число вида $\sqrt{-a}$ можно заменить другим: $\sqrt{a}\sqrt{-1}$. Действительно, $\sqrt{-a}$, согласно первому условию, есть такое число, квадрат которого равен $-a$. Но $\sqrt{a}\sqrt{-1}$ также есть такое число, квадрат которого равен $-a$, потому что, применяя к этому выражению правило о возвышении в степень произведения (согласно второму условию), получим:

$$(\sqrt{a}\sqrt{-1})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{-1})^2=a(-1)=-a.$$

Условились сокращенно обозначать выражение $\sqrt{-1}$ одною буквою i (начальная буква слова *imaginaire*, что значит мнимый). Таким образом, пишут:

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\sqrt{-1}=2i;\quad \sqrt{-3}=\sqrt{3}\sqrt{-1}=i\sqrt{3}.$$

Приведение мнимого числа к виду, содержащему множителя i, яснее обозначает мнимость радикала, которая без того может быть не вполне явною.

413. Комплексные числа. Общий вид всякого вещественного или мнимого числа есть $a+bi$, где a и b суть какие либо вещественные числа, положительные или отрицательные, а i — обозначение $\sqrt{-1}$. Число вида $a+bi$ называется комплексным числом [1]); в нем a есть вещественная часть, bi мнимая часть. При $a=0$ оно обращается в чисто мнимое число $bi=b\sqrt{-1}=$ $=\sqrt{-b^2}$; при $b=0$ оно дает $a+0\cdot i$, что равно одному вещественному числу a, так как произведение $0.i$, согласно условию второму § 411, должно приниматься равным нулю.

Два комплексных числа вида $a+bi$, $a-bi$ называются сопряженными. Под таким видом представляются корни квадратного уравнения, когда они мнимые. Два комплексные числа вида $a+bi$, $-a-bi$ называются противоположными.

414. Основное начало, которому должны быть подчинены комплексные числа. Условившись над комплексными числами производить действия и преобразования по правилам, выведенным для вещественных чисел, при условии, что $i^2=-1$, мы должны будем подчинить комплексные числа следующему началу:

Для того, чтобы комплексное число $a+bi$ равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы $a=0$ и $b=0$.

Хотя предложение это можно было бы рассматривать как условие, которое мы ставим относительно комплексного числа и которое, следовательно, не нуждается в доказательстве, однако полезно обнаружить, что оно не находится в противоречии с поставленными нами ранее двумя условиями, а составляет естественное следствие их. Действительно, если положим, что $a+bi=0$, тогда, совершая над этим равенством преобразования, дозволительные для равенств с вещественными числами, и принимая $i^2=-1$, мы будем иметь:

$$a=-bi;\quad a^2=(-bi)^2=b^2i^2=-b^2;\quad a^2+b^2=0.$$

Так как a^2 и b^2 суть числа положительные, а сумма двух положительных чисел не может равняться нулю, то выведенное равенство возможно только тогда, когда каждое из них отдельно равно нулю; значит, необходимо: $a=0$ и $b=0$. Обратно, если

---

[1]) Слово „комплексный“ означает по-русски „сложный“, „составной“; такое название числу вида $a+bi$ было дано впервые немецким математиком Гауссом (1777 — 1855). Название „мнимый“ *(imaginaire)* было введено французским математиком Декартом в 1637 г.

положим, что $a=0$ и $b=0$, то $a+bi=0+0\cdot i$; принимая умножение на нуль и сложение с нулем в том же условном смысле, какой принят для вещественных чисел, мы должны принять, что $0+0\cdot i=0$.

Следствие. Для того чтобы числа $a+bi$ и $a'+b'i$ были равны, необходимо и достаточно, чтобы $a=a'$ и $b=b'$.

Действительно, если $a+bi=a'+b'i$, то $(a-a')+(b-b')i=0$ и, следовательно, $a-a'=0$ и $b-b'=0$, т. е. $a=a'$ и $b=b'$.

Обратно, если $a=a'$ и $b=b'$, то число $a+bi$ мы должны принимать равным числу $a'+b'i$, так как эти комплексные выражения в этом случае ничем друг от друга не отличаются.

Из равенства комплексных чисел непосредственно следует, что если 2 числа равны одному и тому же 3-му, то они равны и между собою.

Замечание. Относительно компексных чисел не принято никакого соглашения, какое из них считать большим другого.

415. Действия над комплексными числами. Чтобы произвести какое-нибудь действие над мнимыми числами, надо прежде всего каждое из них привести к виду комплексного числа $a+bi$, затем произвести действия над двучленами такого вида по тем правилам, которые выведены были для двучленов с вещественными членами (согласно условию второму § 411) и, наконец, в результате заменить везде i^2 через -1 (согласно условию первому того же §).

Сложение. $(a+bi)+(a_1+b_1i)=(a+a_1)+(b+b_1)i$;

$(a+bi)+(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a+a_1+a_2)+(b+b_1+b_2)i$;

и т. п.

Отсюда легко усмотреть, что сумма комплексных чисел обладает теми же свойствами, какие принадлежат сумме вещественных чисел, т. е. свойствами переместительным и сочетательным.

Вычитание. $(a+bi)-(a_1+b_1i)=(a-a_1)+(b-b_1)i$.

Отсюда видно, что к вычитанию комплексных чисел можно применять общее правило вычитания алгебраических чисел (ч. I, § 22), т. е., чтобы вычесть какое-нибудь число, достаточно прибавить число противоположное; так, вместо того, чтобы от $a+bi$ вычесть a_1+b_1i, можно к $a+bi$ прибавить $-a_1-b_1i$.

Заметим, что сумма или разность двух комплексных чисел может иногда оказаться числом вещественным (напр., сумма сопряженных комплексных чисел).

Умножение. $(a+bi)(a_1+b_1i)=aa_1+a_1bi+ab_1i+bb_1i^2=$
$=(aa_1-bb_1)+(a_1b+ab_1)i.$

Подобным образом можно составить произведение трех и более комплексных чисел.

Легко убедиться (поверкой), что произведение комплексных чисел так же, как и вещественных (ч. I, § 34), обладает свойствами: переместительным, сочетательным и распределительным (относительно сложения). Напр., чтобы проверить последнее свойство, выражаемое равенством:

$$[(a+bi)+(a_1+b_1i)](a_2+b_2i)=(a+bi)(a_2+b_2i)+(a_1+b_1i)(a_2+b_2i),$$

выполним действия, указанные в каждой части этого равенства.

Левая часть дает:
$[a+a_1+(b+b_1)i](a_2+b_2i)=(a+a_1)a_2+(b+b_1)a_2i+(a+a_1)b_2i+$
$+(b+b_1)b_2i^2=(aa_2+a_1a_2-bb_2-b_1b_2)+(ba_2+b_1a_2+ab_2+a_1b_2)i.$

В правой части получается то же самое выражение.

Проверим еще следующее важное свойство произведения: *для того, чтобы произведение комплексных чисел равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы одно из этих чисел равнялось нулю.*

Действительно, если $\quad (a+bi)(a_1+b_1i)=0,$

то $\quad (aa_1-bb_1)+(a_1b+ab_1)i=0$

и следовательно,
$$\begin{cases} aa_1-bb_1=0, \\ a_1b+ab_1=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Умножив первое уравнение этой системы на a и второе на b, сложим их:
$$a^2a_1+b^2a_1=0, \text{ или } a_1(a^2+b^2)=0. \qquad (2)$$

Умножив первое уравнение системы (1) на b и второе на a, вычтем из второго первое:

$$a^2b_1+b^2b_1=0, \text{ или } b_1(a^2+b^2)=0. \qquad (3)$$

Из равенств (2) и (3) заключаем, что или $a^2+b^2=0$, или $a_1=0$, $b_1=0$. Если первое, то $a=0$ и $b=0$ и, следовательно, $a+bi=0$; если второе, то $a_1+b_1i=0$.

Обратно, пусть $a+bi=0$, т. е. $a=0$ и $b=0$; но тогда и $aa_1-bb_1=0$, и $a_1b+ab_1=0$; следовательно, и произведение $(a+bi)$ на (a_1+b_1i) равно 0.

Заметим, что произведение двух сопряженных комплексных чисел $(a+bi)(a-bi)$ равно положительному вещественному числу a^2+b^2.

Деление. Обозначим частное $(a+bi):(a_1+b_1i)$ через $x+yi$, где x и y предположим вещественными числами. Тогда, по определению деления, будем иметь:

$$(a_1+b_1i)(x+yi)=a+bi,$$

т. е.

$$(a_1x-b_1y)+(b_1x+a_1y)i=a+bi,$$

откуда

$$\begin{cases} a_1x-b_1y=a, \\ b_1x+a_1y=b. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на a_1, а второе на b_1 и сложив оба уравнения, получим:

$$(a_1^2+b_1^2)x=aa_1+bb_1 \text{ и } x=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Умножив первое уравнение на b_1, а второе на a_1 и вычтя из второго первое, получим:

$$(a_1^2+b_1^2)y=a_1b-ab_1 \text{ и } y=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Формулы, найденные для x и y, дают возможное решение, если только $a_1^2+b_1^2\neq 0$, т. е. если a_1 и b_1 не равны одновременно нулю; другими словами, если делитель a_1+b_1i не равен нулю.

В этом случае, следовательно, будем иметь:

$$(a+bi):(a_1+b_1i)=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+i\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Замечание. Это же частное мы могли бы получить проще, умножив в дроби $\frac{a+bi}{a_1+b_1i}$ числителя и знаменателя на комплексное число a_1-b_1i, сопряженное с знаменателем:

$$\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{(a_1+b_1i)(a_1-b_1i)}=\frac{aa_1-bb_1i^2+(a_1b-ab_1)i}{a_1^2-(b_1i)^2}=\frac{aa_1+bb_1+(a_1b-ab_1)i}{a_1^2+b_1^2}=$$

$$=\frac{aa_1+bb_1}{a_1^2+b_1^2}+i\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Возвышение в степень. Предварительно найдем результаты от возвышения в степень мнимого числа i, зная, что, согласно условию, i^2 должно приниматься равным -1.

$$i^1=i;\ i^2=-1;\ i^3=i^2\cdot i=(-1)i=-i;\ i^4=i^3\cdot i=-i^2=+1;$$
$$i^5=i^4\cdot i=(+1)i=i;\quad i^6=i^5\cdot i=i^2=-1;\quad i^7=i^6\cdot i=(-1)i=-i$$

и т. д.

Таким образом, последовательные степени i дают повторяющиеся результаты, а именно, следующие четыре: i, -1, $-i$, $+1$. Чтобы узнать, какой из этих результатов получится при возвышении i в степень с показателем n, достаточно разделить n на 4 и обратить внимание только на остаток от деления. Так:

$$i^{27} = i^{4.6+3} = i^3 = -i,$$
$$i^{17} = i^{4.4+1} = i.$$

Заметим еще, что i^0 мы будем принимать равным 1.

Теперь легко найдем результаты возвышения $a + bi$ в степень с целым положительным показателем, так:

$$(a+bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi.$$
$$(a+bi)^3 = a^3 + 3a^2(bi) + 3a(bi)^2 + (bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$$

и т. д.

Извлечение квадратного корня. Положим, что $\sqrt{a+bi} = x + yi$.

Откуда: $$a + bi = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

Следовательно, $$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases} \qquad (1)$$

Вопрос приводится к нахождению вещественных корней этой системы. Возвысив оба уравнения в квадрат и затем сложив их, получим:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(Знак перед радикалом отброшен, так как при вещественных значениях x и y выражение $x^2 + y^2$ не может быть отрицательным.) Возьмем последнее уравнение совместно с первым уравнением системы (1); складывая их и вычитая, получим:

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \quad \text{и} \quad x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}.$$

$$y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \quad \text{и} \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Из второго уравнения системы (1) усматриваем, что знаки у x и y должны быть одинаковые, если $b>0$, и разные, если $b<0$. Поэтому:

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right] \text{ при } b>0$$

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right] \text{ при } b<0$$

Примеры.

1) $$\sqrt{5+12\sqrt{-1}}=\sqrt{5+12i}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}}+\right.$$
$$\left.+i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right]=\pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}}+i\sqrt{\frac{8}{2}}\right)=\pm(\sqrt{9}+i\sqrt{4})=$$
$$=\pm(3+2i).$$

2) $$\sqrt{-1}=\sqrt{i}=\sqrt{0+1\cdot i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}}\right)=$$
$$=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\pm\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right).$$

3) $$\sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{-i}=\sqrt{0-1\cdot i}=$$
$$=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=$$
$$=\pm\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right).$$

Замечание. Чтобы из комплексных чисел можно было извлечь корень третьей или высшей степени, им надо придать иной вид (тригонометрический), о чем мы здесь говорить не будем.

Глава восьмая.

Некоторые замечания об алгебраических уравнениях. Двучленное уравнение.

416. Общий вид алгебраического уравнения. Мы видели (ч. I, § 124), что уравнение, содержащее неизвестное в знаменателях, может быть приведено к целому виду. Далее мы знаем (ч. I, § 234), что уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала, может быть приведено к рациональному виду. Вследствие этого можем сказать, что всякое уравнение, в котором неизвестное связано с данными числами посредством конечного числа 6 алгебраических действий (сложения, вычитания, умножения, деле-

ния, возвышения в степень и извлечения корня [1]), может быть приведено к такому целому и рациональному виду:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L = 0,$$

где коэффициенты A, B, $C \ldots K$ и L суть постоянные вещественные или комплексные числа, а m есть показатель степени уравнения. Некоторые коэффиценты в частных случаях могут равняться 0.

Уравнение такого вида называется алгебраическим. Алгебраические уравнения степени выше 2-й называются уравнениями высших степеней.

417. Некоторые свойства алгебраического уравнения. Уравнения высших степеней составляют предмет высшей алгебры. Элементарная же рассматривает только некоторые частные случаи этих уравнений.

Высшая алгебра устанавливает следующую важную истину: всякое алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами имеет вещественный или комплексный корень (Теорема Гаусса[2]) (1799). Допустив эту истину (доказательство которой в элементарной алгебре было бы затруднительно), не трудно показать, что алгебраическое уравнение имеет столько корней, вещественных или комплексных, сколько единиц в показателе его степени.

Действительно, согласно теореме Гаусса, уравнение:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L = 0 \qquad (1)$$

имеет вещественный или комплексный корень; пусть этот корень будет a. Тогда многочлен, стоящий в левой части уравнения (1), должен делиться на $x - a$ (§ 392). Если сделаем деление, то в частном получим многочлен степени $m - 1$, у которого первый коэффициент будет A. Обозначив другие его коэффициенты соответственно буквами: B_1, $C_1 \ldots K_1$ и приняв во внимание, что делимое равно делителю, умноженному на частное, можем представить уравнение (1) так:

$$(x - a)\ (Ax^{m-1} + B_1x^{m-2} + C_1x^{m-3} + \ldots + K_1) = 0. \qquad (2)$$

---

[1]) В предположении, что при возвышении в степень и при извлечении корня неизвестное не входит ни в показатель степени, ни в показатель корня.

[2]) Карл Фридрих Гаусс — знаменитый немецкий математик (1777—1855).

Приравняв нулю многочлен, стоящий во вторых скобках, получим новое уравнение, которое, по той же теореме, должно иметь некоторый корень β; вследствие этого левая его часть может быть разложена на два множителя: $x-\beta$ и многочлен степени $m-2$, у которого первый коэффициент попрежнему будет A. Поэтому уравнение (1) можно переписать так:

$$(x-\alpha)\ (x-\beta)\ (Ax^{m-2}+B_2x^{m-3}+\ldots)=0. \tag{3}$$

Продолжая эти рассуждения далее, дойдем, наконец, до того, что многочлен, заключенный в последних скобках, будет 2-й степени, причем первый его коэффициент останется A. Разложив этот трехчлен на множителей (ч. I, § 222), приведем уравнение (1) окончательно к виду:

$$A\,(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)=0, \tag{4}$$

где всех разностей: $x-\alpha$, $x-\beta\ldots$ будет m. Очевидно, что уравнение (4) обращается в тождество при каждом из значений: $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma\ldots x=\lambda$ и не удовлетворяется никакими иными значениями x (если $A\neq 0$); значит, уравнение (1) имеет m корней α, β, $\gamma\ldots$ λ. В частных случаях некоторые и даже все корни могут оказаться одинаковыми.

Полезно заметить еще следующие истины, доказываемые в высшей алгебре.

Сумма корней всякого алгебраического уравнения

$$Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+Kx+L=0$$

равна $-\frac{B}{A}$, а произведение корней равно $\frac{L}{A}$ (примером может служить квадратное уравнение).

Если алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами имеет комплексные корни, то число этих корней четное (примером может служить биквадратное уравнение).

Если алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами имеет n корней вида $p+qi$, оно имеет n корней вида $p-qi$ (примером может служить биквадратное уравнение, комплексные корни которого всегда сопряженные), и так как

$$[x-(p+qi)]\,[x-(p-qi)]=[(x-p)-qi]\,[(x-p)+qi]=$$
$$=(x-p)^2-q^2i^2=(x-p)^2+q^2=x^2-2px+(p^2+q^2),$$

то левая часть уравнения содержит в этом случае n вещественных множителей вида ax^2+bx+c.

Алгебраическое уравнение нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет, по крайней мере, один вещественный корень.

Уравнения с произвольными буквенными коэффициентами степени не выше 4-й разрешены алгебраически, т. е. для корней этих уравнений найдены общие формулы, составленные из коэффициентов уравнения посредством алгебраических действий.

В этом смысле уравнения с произвольными буквенными коэффициентами степени выше 4-й не могут быть разрешены алгебраически (теорема Абеля[1]); однако, когда коэффициенты уравнения какой-угодно степени выражены числами, всегда есть возможность вычислить с желаемой степенью приближения все его корни как вещественные, так и мнимые. Указание способов такого вычисления составляет важную часть предмета высшей алгебры.

418. Двучленное уравнение. Двучленным уравнением называется уравнение вида: $ax^m + b = 0$, или, что то же самое, вида $x^m + \frac{b}{a} = 0$ [2]). Обозначив абсолютную величину дроби $\frac{b}{a}$ через q, мы можем двучленное уравнение написать: или $x^m + q = 0$, или $x^m - q = 0$. При помощи вспомогательного неизвестного эти уравнения всегда можно упростить так, что свободный член у первого обратится в $+1$, а у второго в -1. Действительно, положим, что $x = y\sqrt[m]{q}$, где $\sqrt[m]{q}$ есть арифметический корень m-й степени из q; тогда $x^m = qy^m$, уравнения примут вид:

$$qy^m + q = 0, \text{ т. е. } q(y^m + 1) = 0; \text{ откуда: } y^m + 1 = 0;$$

или $$qy^m - q = 0, \text{ т. е. } q(y^m - 1) = 0; \text{ откуда: } y^m - 1 = 0.$$

Итак, решение двучленных уравнений приводится к решению уравнений вида $y^m \pm 1 = 0$. Решение таких уравнений элементарными способами может быть выполнено только при некоторых частных значениях показателя m. Общий прием, употребляемый при этом, состоит в разложении левой части уравнения на множителей, после чего уравнение приводится к виду $ABC... = 0$, рассмотренному нами раньше (ч. I, § 230).

---

[1]) Норвежский математик начала XIX столетия (1802 — 1829).

[2]) Когда двучленное уравнение имеет вид $ax^m + bx^n = 0$, где $m > n$, то его можно представить так: $x^n(ax^{m-n} + b) = 0$ и следовательно, оно распадается на два уравнения: $x = 0$ и $ax^{m-n} + b = 0$.

419. Решение двучленных уравнений третьей степени. Эти уравнения следующие:

$$x^3-1=0 \text{ и } x^3+1=0.$$

Заметив, что (§ 395):

$$x^3-1=x^3-1^3=(x-1)\ (x^2+x+1) \text{ и } x^3+1=x^3+1^3=$$
$$=(x+1)\ (x^2-x+1),$$

мы можем предложенные уравнения написать так:

$$(x-1)\ (x^2+x+1)=0 \text{ и } (x-1)\ (x^2+x+1)=0.$$

Значит, первое из них имеет корни уравнений:

$$x-1=0 \text{ и } x^2+x+1=0,$$

а второе — корни уравнений:

$$x+1=0 \text{ и } x^2-x+1=0.$$

Решив их, находим, что уравнение $x^3-1=0$ имеет следующие три корня:

$$x_1=1,\ x_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ x_3=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

из которых один вещественный, а два мнимых; уравнение $x^3+1=0$ имеет три корня:

$$x_1=-1,\ x_2=\frac{1+\sqrt{-3}}{2},\ x_3=\frac{1-\sqrt{-3}}{2},$$

из которых также один вещественный, а два мнимых.

420. Различные значения корня (радикала). Решение двучленных уравнений m-й степени имеет тесную связь с нахождением всех значений корня той же степени из данного числа. В самом деле, если буквою x обозначим какое угодно значение $\sqrt[m]{A}$, то, согласно определению корня, мы будем иметь: $x^m=A$ и, следовательно, $x^m-A=0$; таким образом, каждое решение этого двучленного уравнения представляет собою m-й корень из числа A: следовательно, сколько различных решений имеет двучленное уравнение, столько различных значений имеет $\sqrt[m]{A}$.

Докажем, напр., что *кубичный корень из всякого числа имеет три различных значения.*

Найти все значения $\sqrt[3]{A}$ значит, другими словами, решить уравнение $x^3 - A = 0$. Обозначив арифметическое значение $\sqrt[3]{A}$ через q (оно может быть только одно, ч. I, § 166), введем вспомогательное неизвестное y, связанное с x таким равенством: $x = qy$. Тогда уравнение $x^3 - A = 0$ представится так: $q^3y^3 - A = 0$; но $q^3 = A$; поэтому $q^3y^3 - A = A\ (y^3 - 1)$; следовательно, уравнение окончательно примет вид: $y^3 - 1 = 0$. Мы видели, что это уравнение имеет три корня:

$$y_1 = 1,\ y_2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ y_3 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Каждое из этих значений, удовлетворяя уравнению $y^3 = 1$, представляет собою кубичный корень из 1. Так как $x = qy$, то

$$x_1 = q \cdot 1,\ x_2 = q \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ x_3 = q \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Это и будут три значения $\sqrt[3]{A}$; одно из них вещественное, а два мнимые. Все они получатся, если арифметическое значение кубичного корня из A умножим на каждое из трех значений кубичного корня из 1. Напр., кубичный корень из 8, арифметическое значение которого есть 2, имеет следующие три значения:

$$2;\ 2 \cdot \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = -1 + \sqrt{-3};\ 2 \cdot \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = -1 - \sqrt{-3}.$$

З а м е ч а н и е. В высшей алгебре доказывается, что двучленное уравнение $x^m - A = 0$ имеет m различных корней; вследствии этого $\sqrt[m]{A}$ имеет m различных значений, причем, если m число четное и A отрицательное, то все эти значения мнимые; если m четное и A положительное, то два значения вещественные (из них одно положительное, другое отрицательное, с одинаковой абсолютной величиной); наконец, если m нечетное число, то из всех значений $\sqrt[m]{A}$ только одно вещественное.

ОТДЕЛ ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ.

(В скобках поставлены соответствующие параграфы.)

Основные сведения о пределах.

(§§ 307—318.)

1. Найти предел, к которому стремится дробь

$$\frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 5x + 2},$$

если $x \to 1$.

Решение. Если $x \to 1$, то числитель и знаменатель данной дроби стремятся к 0. Но так как $\frac{0}{0}$ есть неопределенное выражение, то мы остаемся в неизвестности, к какому пределу стремится данная дробь (и даже стремится ли она к какому бы то ни было пределу), если $x \to 1$.

Поступим так: предположим, что x равен не 1, а какому-нибудь переменному числу, приближающемуся к 1. Например, пусть $x = 1 + h$, где h какое-нибудь положительное число, стремящееся к нулю. Тогда величина данной дроби будет:

$$\frac{2(1+h)^2 - (1+h) - 1}{3(1+h)^2 - 5(1+h) + 2} = \frac{2 + 4h + 2h^2 - 1 - h - 1}{3 + 6h + 3h^2 - 5 - 5h + 2} = \frac{2h^2 + 3h}{3h^2 + h} = \frac{2h + 3}{3h + 1}$$

(сократить дробь на h мы имеем право, так как $h \neq 0$).

Предположим теперь, что $h \to 0$ и, следовательно, $x \to 1$.

$$\text{пред.}\left(\frac{2h+3}{3h+1}\right)_{h \to 0} = \frac{\text{пред.}\ (2h+3)_{h \to 0}}{\text{пред.}\ (3h+1)_{h \to 0}} = \frac{3}{1} = 3.$$

Тот же самый предел мы найдем, если допустим, что $x = 1 - h$, где h какое-нибудь положительное число, стремящееся

к 0. Таким образом, будет ли x приближаться к 1, оставаясь больше 1 или оставаясь меньше 1, предел данной дроби будет один и тот же, именно 3.

2. Найти предел, к которому стремится дробь

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2+7x-8},$$

если $x \longrightarrow 1$.

3. То же, если $x \longrightarrow 0$.

4. Найти пред. $\left(\frac{2x^3-5x^2-4x+12}{x^3-12x+16}\right)_{x\longrightarrow 2}$

5. Найти пред. $\left(\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}\right)_{x\longrightarrow 2}$

6. Найти пред. $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\longrightarrow\infty}$.

Решение. Так как

$$\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

$$\text{то пред. }\frac{n}{n+1}=\text{пред. }\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{\text{пред. }\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{1}=1.$$

7. Найти пред. $\left[\frac{n(n+1)}{2n^2}\right]_{n\longrightarrow\infty}$

8. Найти пред. $\left(\frac{2x+3}{5x+\sqrt{x^2+1}}\right)_{x\longrightarrow\infty}$

9. Найти предел, к которому стремится дробь, если к числителю и знаменателю ее будем прикладывать одно и то же число, неограниченно возрастающее; другими словами, найти

$$\text{пред }\left(\frac{a+m}{b+m}\right)_{m\longrightarrow\infty}$$

Решение. Пред. $\frac{a+m}{b+m}=$ пред. $\frac{\frac{a}{m}+1}{\frac{b}{m}+1}=\frac{\text{пред. }\left(\frac{a}{m}+1\right)}{\text{пред. }\left(\frac{b}{m}+1\right)}=$

$$=\frac{\text{пред. }\frac{a}{m}+1}{\text{пред. }\frac{b}{m}+1}=\frac{0+1}{0+1}=1.$$

Таким образом, будет ли дробь $\frac{a}{b}$ правильная ($a<b$), или неправильная ($a>b$), предел дроби, когда $m\longrightarrow\infty$, оказывается один и тот же, именно 1. Отсюда следует, что правильная

дробь, приближаясь к 1, увеличивается, а неправильная уменьшается. Таким образом, например.

$$\frac{2}{3}<\frac{2+8}{3+8};\quad \frac{3}{2}>\frac{3+8}{2+8}.$$

10. Доказать, что если $x>1$, то

$$\text{пред. } (x^n)_{n\to\infty}=\infty,$$

если $x<1$, то этот предел есть 0 (показатель n предполагается целым положительным).

Решение. Если $x>1$, то можно принять, что $x=1+h$, где h какое-нибудь положительное число.
Тогда

$$x^n=(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}h^2+\ldots$$

Отсюда следует, что при h положительном

$$x^n=(1+h)^n>1+nh.$$

При безграничном возрастании n произведение nh, а поэтому и сумма $1+nh$, возрастает неограниченно; значит, пред. $(x^n)_{n\to\infty}=\infty$.

Пусть теперь $x<1$. Положим тогда, что $x=\frac{1}{x_1}$, где $x_1>1$.
Тогда

$$\text{пред. } (x^n)=\text{пред. } \frac{1}{x_1^n}=\frac{1}{\text{пред. } x_1^n}$$

Но $x_1>1$; поэтому по доказанному выше пред. $x_1^n=\infty$ и, следовательно,

$$\text{пред. } (x_1^n)=\frac{1}{\infty}=0.$$

Отсюда, между прочим, вытекают те два предложения о бесконечных геометрических прогрессиях, которые были нами ранее доказаны другим путем (ч. I, §§ 251,б и 251,в), а именно, что член aq^n прогрессии при неограниченном возрастании n (т. е. при удалении от начала прогрессии) безгранично возрастает, если прогрессия возрастающая ($q>1$), и безгранично убывает (стремится к нулю), если прогрессия убывающая ($q<1$).

11. Доказать, что

$$\text{пред. } \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)_{n\to\infty}=\frac{1}{2}.$$

12. Доказать, что

$$\text{пред.} \left(\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}\right)_{n\to\infty} = \frac{1}{3}.$$

13. Доказать, что

$$\text{пред.} \left[\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\right]_{h\to 0} = 3x^2.$$

14. Доказать, что

$$\text{пред.} \left[\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\right]_{h\to 0} = nx^{n-1}.$$

(n целое положительное число).

15. Найти пред. $\left[\frac{1+2+3+\ldots+n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}\right]_{n\to\infty}$.

16. Построить график функции

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Найти предельное значение этой функции, если $x \to 0$, оставаясь положительным, и предельное значение, если $x \to 0$, оставаясь отрицательным.

Подъем кривой и производные.

(§§ 319—333.)

17. Начертить график функции $y = x^2 - 3x + 2$; определить подъем кривой при $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$; вообще при $x = x$.

18. То же для $y = 3x^2 - 2x + 5$.

Найти производные от функций:

19. $y = 5x$ $\quad$ $y = -7^1/_2 x$.
20. $y = 3x - 4$ $\quad$ $y = 3 - 2x$.
21. $y = 10x^2$ $\quad$ $y = -0{,}8x^2$.
22. $y = 3x^2 - 2x + 4$ $\quad$ $y = x^2 - 2x - 1$.

Возрастание или убывание функций.

Maximum и minimum.

(§§ 334—335.)

23. Построить график функции

$$y = {}^1/_4\,(3x^2 - 4x - 7)$$

между $x = -3$ и $x = 2$. Определить (и проверить на чертеже), при каких значениях x функция возрастает и при каких убы-

вает. Имеет ли функция *minimum* или *maximum* и чему он равен?

24. Проследить изменение функции:

$$y = 7x^2 + 3x - 2,$$

т. е. определить, при каких значениях x функция возрастает при каких убывает и имеет ли *maximum*, или *minimum* и какие.

То же для функций:

25. $y = -x^2 + 8x + 1$ $\quad y = -5x^2 + 4x + 1.$
26. $y = {}^1/_2 x^2 + 3x - 7$ $\quad y = 0{,}1x^2 - {}^1/_4 x + 2.$
27. $y = x^2 + 3$ $\quad y = -x^2 + 7.$
28. $y = x^2 - 4x$ $\quad y = x^2 + 4x.$
29. $y = 2x^2 - 8x + 5$ $\quad y = -3x^2 + 9x - 9.$
30. $y = 2 - 3x - x^2$ $\quad y = 7 + 2x - 3x^2.$
31. $y = (x - 3)^2 + (3x - 5)^2.$
32. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 10}$ $\quad y = \sqrt{3 - 4x - 3x^2}.$

Указание. Если радикал рассматривается только в положительном значении, то очевидно, что в двух последних примерах y изменяется в том же смысле, в каком изменяется подкоренная величина. Поэтому вопрос приводится к рассмотрению изменения трехчленов $x^2 - 2x + 10$ и $3 - 4x - 3x^2$.

Maximum и minimum.

(§§ 334—335.)

33. Данное число a разделить на такие две части, чтобы произведение их было наибольшее из всех возможных.

Решение. Пусть одна часть x, тогда другая часть равна $a - x$ и их произведение будет $x(a - x) = ax - x^2$. Производная этого двучлена есть $a - 2x$. Из признаков возрастания и убывания функций (§ 335) следует, что

если $a - 2x > 0$, т. е. $x < {}^1/_2 a$, то функция возрастает;
если $a - 2x < 0$, т. е. $x > {}^1/_2 a$, то функция убывает.

Значит, при $x = {}^1/_2 a$ наша функция получает *maximum*. Тогда другая часть будет равна $a - {}^1/_2 a = {}^1/_2 a$, т. е. обе части окажутся одинаковы.

Мы приходим таким образом к следующему выводу, который полезно заметить: **если сумма двух переменных чисел равна постоянному числу, то их произведение**

будет наибольшее из всех возможных тогда, когда эти числа сделаются равными между собою. Например, если $x+y=10$, то произведение xy будет наибольшее, когда $x=y=5$. И действительно: $5\cdot5=25$; $6\cdot4=24$; $7\cdot3=21$; $8\cdot2=16$ и т. д.

Выводом этим приходится иногда пользоваться для решения различных задач на *maximum*. Приведем этому примеры.

34. Из всех прямоугольников с данным периметром какой будет иметь наибольшую площадь?

Решение. Пусть данный периметр есть $2p$, основание x и высота y. Тогда площадь равна xy. Так как $x+y$ есть полупериметр, равный постоянному числу p, то *maximum* произведения xy будет при $x=y$, т. е. тогда, когда прямоугольник сделается квадратом.

35. В круге данного радиуса r вписать прямоугольник с наибольшею площадью.

Решение. Если x и y будут основание и высота вписанного прямоугольника, то $x^2+y^2=r^2$. Требуется при этом условии найти *maximum* произведения xy. Очевидно, что *maximum* этого произведения будет при тех же значениях x и y, при которых будет *maximum* квадрата его. Но $(xy)^2=x^2y^2$ и x^2+ $+y^2=$ постоянному числу r^2. Значит, *maximum* x^2y^2, будет при $x^2=y^2$, т. е. при $x=y$; тогда же будет и *maximum* xy. Искомый прямоугольник должен быть квадрат.

36. В данный треугольник вписать прямоугольник с наибольшею площадью так, чтобы его основание лежало на основании треугольника, а две вершины упирались в боковые стороны его.

Решение. Обозначим основание и высоту треугольника b и h и прямоугольника x и y. Из подобия треугольников находим: $x:b=(h-y):h$; откуда: $x=\frac{b(h-y)}{h}$. Подставив в выражение площади прямоугольника xy на место x найденную величину, получим:

$$\text{площадь прямоугольника}=\frac{b(h-y)y}{h}.$$

Требуется найти, при каком значении y эта дробь будет иметь наибольшее значение. Но в этой дроби знаменатель и множитель b в числителе суть числа постоянные; поэтому дробь получит наибольшее значение тогда, когда произведение $(h-y)y$ сделается наибольшим. Но в этом произведении сумма сомно-

жителей $h-y$ и y есть число постоянное; вследствие этого *maximum* произведения $(h-y)y$ будет при $h-y=y$, т. е. при $y={}^1/_2h$.

37. Из всех прямоугольников, вписанных в круг данного радиуса r, какой имеет наибольший периметр?

Решение. Вопрос приводится к нахождению *maximum* суммы $x+\sqrt{4r^2-x^2}$. Вместо этой суммы нам выгоднее искать *maximum* ее квадрата:

$$(x+\sqrt{4r^2-x^2})^2=x^2+4r^2-x^2+2x\sqrt{4r^2-x^2}=4r^2+2x\sqrt{4r^2-x^2}$$

и, следовательно, *maximum* произведения $x\sqrt{4r^2-x^2}$. Квадрат этого произведения, равный $x^2(4r^2-x^2)$, имеет *maximum* при $x^2=4r^2-x^2$, так как сумма сомножителей есть число постоянное ($4r^2$). Значит, $x=r\sqrt{2}$, но тогда и высота прямоугольника будет равна $\sqrt{4r^2-x^2}=\sqrt{4r^2-2r^2}=r\sqrt{2}$, т. е. прямоугольник будет квадратом.

38. В треугольнике даны основание (a) и сумма (s) его боковых сторон. Каковы должны быть эти стороны, чтобы площадь треугольника была наибольшая?

Решение. Если x и y будут боковые стороны треугольника, то периметр его равен $x+y+a=s+a$, т. е. он есть величина постоянная. Обозначив его $2p$, мы можем воспользоваться формулой, выражающей площадь Δ треугольника по его трем сторонам:

$$\Delta=\sqrt{p\,p-a)(p-x)(p-y)},$$

и искать *maximum* произведения $(p-x)\ (p-y)$. Так как $(p-x)+(p-y)=2p-(x+y)=2p-s$, т. е. эта суммма есть величина постоянная, то *maximum* ее будет при $p-x=p-y$, т. е. при $x=y$. Значит, искомый треугольник должен быть равнобедренный.

39. Какой из всех прямоугольников с данною диагональю имеет: 1) наибольшую площадь; 2) наибольший периметр?

40. В круге данного радиуса r проведена хорда. Какова должна быть эта хорда, чтобы треугольник, образованный ею и двумя радиусами, проведенными к концам хорды, имел наибольшую площадь?

Указание. Обозначив длину хорды $2x$, мы приведем вопрос к нахождению *maximum* выражения $x\sqrt{r^2-x^2}$, или его квадрата $x^2(r^2-x^2)$. В окончательном результате увидим, что хорда должна быть стороною вписанного квадрата.

41. Какой из всех прямоугольников с данным периметром $2p$ имеет наименьшую диагональ?

Указание. Если стороны прямоугольника будут x и y, то диагональ его выразится $\sqrt{x^2+y^2}$, а периметр $2x+2y$. По условию задачи $2x+2y=2p$; следовательно, $x+y=p$ и $y=p-x$. Поэтому диагональ равна $\sqrt{x^2+(p-x)^2}$. Наименьшая величина ее будет, очевидно, при наименьшей величине подкоренного выражения. Таким образом, вопрос сводится к нахождению наименьшего значения $x^2+(p-x)^2=2x^2-2px+p^2$. Это значение найдется при помощи производной так, как это указано на примере, приведенном в конце § 335 этой книги.

Скорость как производная от пространства.

(§§ 337—341.)

42. Некоторое тело движется прямолинейно, таким образом, что в конце t-й секунды от начала движения оно оказывается удаленным от своего начального положения на расстояние e, определяемое равенством:

$$e=4-3t+t^2.$$

Определить: а) закон скорости этого движения; б) когда скорость положительна, когда она отрицательна и когда равна нулю; в) найти *maximum* удаления тела от начального положения.

43. Решить те же вопросы, если удаление e выражается формулой:

$$e=2t^2-4t+5.$$

Ускорение как производная от скорости.

(§§ 342—343.)

44. Тело движется таким образом, что скорость v этого движения в зависимости от времени t (сек.) выражается формулой:

$$v=6t-4t^2.$$

Определить: а) когда скорость возрастает; б) когда она убывает; в) *maximum* скорости; г) закон ускорения.

45. Тело движется по прямой линии; его удаление e от некоторой определенной точки O, взятой на этой прямой, выражается в зависимости от времени t формулой:

$$e = {}^3/_2 - 2t + {}^1/_2 t^2.$$

Определить: а) расстояние тела до точки O в момент, от которого начинается счет времени (в момент $t = 0$);

б) закон скорости;

в) какова скорость в момент $t = 0$ (что означает отрицательный знак перед величиною скорости?);

г) когда тело начинает двигаться в положительном направлении;

д) когда тело проходит точку O (объяснить двойной ответ);

е) каков закон ускорения относительно времени.

46. Те же самые вопросы относительно движения тела, которого расстояние от точки O определяется формулой:

$$e = 8 - 7t + t^2.$$

47. Точка движется по прямой Ox таким образом, что ее расстояние e от O в конце t-ой секунды выражается формулой:

$$e = t^2 - 12t.$$

Найти закон скорости и закон ускорения. Когда скорость сделается равной нулю? В какой момент будет *minimum* e?

48. Скорость некоторого прямолинейного движения выражается формулой: $v = 4 - 6t + 3t^2$. Определить: а) начальную скорость; б) начальное ускорение; в) ускорение в конце 2-й секунды; г) среднее ускорение в промежуток времени от конца 1-й секунды до конца 2-й.

Функция третьей степени.

(§§ 344—346.)

Исследовать следующие функции 3-й степени и построить их графики:

49. $y = x^3 - {}^3/_2 x^2 - 6x + 2{}^1/_2$ $\quad$ $y = {}^1/_3 x^3 - x^2 - 3{}^1/_3 x + 8$.

50. $y = x^3 - 6x^2 + 5x + 11$ $\quad$ $y = 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2$.

51. $y = x^3 + 2x^2 - x - 1$.

52. $y = x^3 - 7x - 4$; $\quad$ 53. $y = x^3 - 13x + 12$;

54. $y = x^3 - 7x + 5$; $\quad$ 55. $y = x^2(6 - x)$.

Замечание. Если значения данной функции настолько велики, что их неудобно изобразить на чертеже, то можно все их уменьшать в несколько раз. Например, при исследовании функции:

$$y = x^3 + 15x^2 + 12x - 27$$

удобнее уменьшить значения функции в 9 раз, т. е. взять функцию:

$$\frac{1}{9}y = \frac{1}{9}x^3 + \frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 3.$$

Графическое решение уравнения 3-й степени.

(§ 347.)

Решить графически следующие уравнения:

56. $x^3 + x - 4 = 0.$ 57. $x^3 - 3x = -2.$
58. $x^3 - 3x = 1{,}5.$ 59. $x^3 - 3x + 1 = 0.$
60. $x^3 + x - 7 = 0.$ 61. $x^3 - x - 1 = 0.$
62. $x^2 - \frac{2}{x} = 1.$ 63. $x^2 - \frac{2}{x} = 4.$
64. $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x} = 3.$ 65. $x^3 - 4x^2 + 5 = 0.$

Замечание. Последний пример можно свести к построению параболы 3-й степени $y = x^3$ и параболы 2-й степени $y = 4x^2 - 5$.

Функция вида $y = \frac{a}{x}$.

(§§ 348—349.)

66. Построить график $y = \frac{4}{x}$ между $x = -4$ и $x = +4$. Найти предельные значения при $x = \pm\infty$ и $x = 0$. Найти производную от этой функции и при ее помощи определить, где функция возрастает и где убывает и куда направлена ее вогнутость.

67. Построить график $y = -\frac{1}{x}$. Сравнить его с графиком $y = \frac{1}{x}$ (черт. 91).

68. Построить графики функций:

$$1)\ y = x + \frac{1}{x};\quad 2)\ y = x - \frac{1}{x}.$$

Найти производные этих функций и при их помощи решить вопросы о возрастании или убывании функций, а также о *maximum* и *minimum* их.

Замечание. Графики указанных функций можно, конечно, строить, составив предварительно таблицы их значений для нескольких произвольно взятых значений x. Но можно поступить и так: построить (при одних и тех же осях и в одном и том же масштабе) график функции $y=\frac{1}{x}$ (это будет гипербола, изображенная на черт. 91) и график функции $y=x$ (это будет биссектриса углов xOy и $x'Oy'$). Затем все ординаты биссектрисы увеличить (для функции $y=x+\frac{1}{x}$) или уменьшить (для функции $y=x-\frac{1}{x}$) на соответствующие ординаты гиперболы. Этот прием можно употреблять вообще тогда, когда данная функция представляет собою сумму или разность двух других функций.

69. Построить графики x^2-7 и $\frac{4}{x}$. Найти точки пересечения и при их помощи определить корни уравнения $x^3-7x-4=0$ (т. е. уравнения $x^2-7=\frac{4}{x}$).

70. Построить графики $\frac{1}{x}+1$ и x^2+2x между $x=-3$ и $x=2$. Найти точки пересечения и при их помощи решить уравнение $x^3+2x^2-x-1=0$.

Уравнение прямой.

(§§ 350–352; повторить §§ 115–117 части I).

71. Каково будет уравнение прямой, параллельной оси x-ов и отсекающей от оси y-ов отрезок, равный $+2$; $+3^1/_2$; -4; $-10,5$?

72. Каково будет уравнение прямой, параллельной оси y-ов и отсекающей от оси x-ов отрезок, равный $+3$; -5; (вообще m)?

73. Какая прямая выражается уравнением: а) $y=0$; б) $x=0$?

74. Что можно сказать о прямой, выражаемой уравнением вида $y=ax$: а) если $a>0$; б) если $a<0$?.

75. Какая прямая выражается уравнением: а) $y=x$; б) $y=-x$?

76. Чему равен угловой коэффициент прямой, выражаемой следующим уравнением:

а) $y=2x+5$ б) $y=x-3$ в) $y=^1/_2x$
г) $y=7-3x$ д) $y=-0,5x$ е) $y=-x$.

77. Чему равны угловой коэффициент и начальная ордината прямой, выражаемой уравнением:

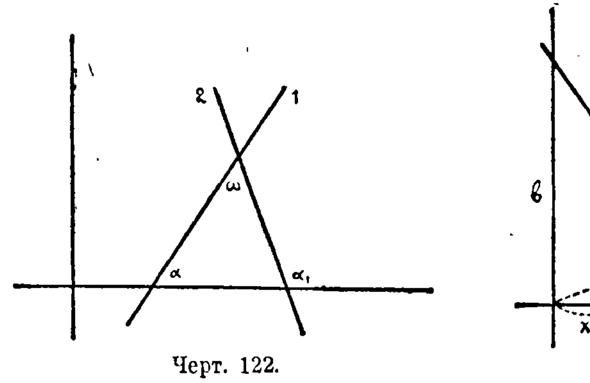
$$\text{а) } 3x + 2y = 10 \qquad \text{б) } -0{,}7y + {}^3/_4x - 5 = 0$$
$$\text{в) } ax + by = c?$$

78. Каким уравнением выражается:

а) ось x-ов; б) ось y-ов?

79. Если две прямые, выражаемые уравнениями вида: $y = ax + b$ и $y = a_1x + b_1$, параллельны между собою, то что можно утверждать об угловых коэффициентах a и a_1?

80. Найти угол, образуемый двумя пересекающимися прямыми $y = ax + b$ и $y = a_1x + b_1$.



Черт. 122. Черт. 123.

Решение. Из чертежа 122-го видно, что $\omega = \alpha_1 - \alpha$; следовательно,

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha} = \frac{a_1 - a}{1 + aa_1}.$$

Пусть, например, $y = 2x - 3$ и $y = 5x + 1$. Тогда

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{5 - 2}{1 + 5 \cdot 2} = \frac{3}{11}$$

и $\log \operatorname{tg}\omega = \log 3 - \log 11 = 0{,}4771 - 1{,}0414 = \bar{1}{,}4357$; $\omega = 15^\circ\ 15'$ (приблизительно).

81. Найти условие перпендикулярности двух прямых $y = ax + b$ и $y = a_1x + b_1$.

Решение. Из предыдущей задачи видно, что если $\omega = 90^\circ$, то $\operatorname{tg}\omega = \infty$ и $1 + aa_1 = 0$; следовательно, искомое условие есть следующее:

$$a_1 = -\frac{1}{a}.$$

Например, прямые $y = 2x - 3$ и $y = -0{,}5x - 3$ перпендикулярны, так как $-0{,}5 = -{}^1/_2$.

82. Если прямая выражается уравнением:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

то что означают здесь a и b?

Решение. Положив в уравнении $x = 0$, найдем: $y = b$. Значит, на прямой находится точка $(0,b)$, т. е. прямая отсекает от оси y-ов отрезок, равный b. Равным образом, положив $y = 0$, найдем: $x = a$. Значит, прямая отсекает от оси x-ов отрезок, равный a.

Это же можно видеть из чертежа 123-го. Из подобия треугольников следует, что ординаты произвольной точки M прямой удовлетворяют пропорции:

$$y : b = (a - x) : a,$$

откуда: $ay = ab - bx$; $bx + ay = ab$.

Разделив все члены на ab, найдем:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Составить уравнение прямой, проходящей через точку:

83. (2,5)	(— 2,5)	(2, — 5)	(— 2, — 5)
84. (0,7)	(0, — 7)	(3,0)	(— 3,0)

Составить уравнение прямой, проходящей через следующие пары точек:

85. (1,5) и (2,3)	(— 3,2) и (7,— 4).
86. (0,0) и (5,6)	(0,4) и (— 2, — 3).
87. (0,7) и (2,0)	(— 2, — 3) и (7,8).

88. Даны две точки: (2,5) и (7,3). Найти расстояние между ними.

Найти расстояние между двумя точками каждой из следующих пар:

89. (— 3,5) и (2,3)	(— 3,5) и (2, — 3).
90. (3, — 5) и (2,3)	(3, — 5) и (— 2, — 3).

91. Проверить, что если даны две точки: (x_1, y_1) и (x_2, y_2), то при всех возможных случаях расположения этих точек расстояние l между ними выражается формулой:

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Уравнение окружности.

(§ 353.)

92. Написать уравнение окружности, центр которой совпадает с началом координат и радиус равен: а) 5; б) $^8/_3$; в) 2,7.

Написать уравнение окружности, радиуса 10, центр которой лежит в точке:

93. 1) (12,13)	2) (10,13)	3) (10,10)
94. 1) (7,13)	2) (7,8)	3) (0,11)
95. 1) (0,5)	2) (12,0)	3) (3,0)
96. 1) (—2,4)	2) (—2, —3),	3) (7, —5)

97. Найти радиус окружности, выражаемой уравнением:

а) $x^2+y^2=100$ б) $x^2+y^2=50$.

Показать, что следующие уравнения выражают окружности, найти их радиусы (перед знаками квадратных радикалов надо подразумевать оба знака $\pm$):

98. $25x^2+25y^2=289$ $4x^2+4y^2=49$

99. $y=\sqrt{16-x^2}$ $y=\sqrt{36-x^2}$.

100. $y=\sqrt{20-x^2}$ $y={}^1/_3\sqrt{100-9x^2}$

101. $y={}^1/_2\sqrt{81-4x^2}$ $(x-2)^2+(y-1)^2=25$

102. $(x+3\,{}^1/_2)^2+(y-4)^2=\frac{81}{4}$

103. Показать, что уравнение

$$3x^2+3y^2+8x-6y=20$$

(у которого коэффициенты при x^2 и y^2 одинаковы и нет числа, содержащего xy) есть уравнение круга; определить его радиус и положение центра.

Решение. Разделим все члены на общий коэффициент при x^2 и y^2:

$$x^2+y^2+{}^8/_3\,x-2y={}^{20}/_3,$$

или

$$x^2+{}^8/_3\,x+y^2-2y={}^{20}/_3.$$

Чтобы дополнить сумму первых 2 членов до полного квадрата, надо к ней добавить $({}^4/_3)^2$; чтобы сделать то же самое с суммой 3-го и 4-го членов надо добавить к ней 1^2. Добавим же к каждой части уравнения по $({}^4/_3)^2+1$, т. е. по ${}^{25}/_9$; тогда получим:

$$(x+{}^4/_3)^2+(y-1)^2={}^{20}/_3+{}^{25}/_9={}^{85}/_9.$$

Отсюда видно, что уравнение представляет окружность, которой центр находится в точке $(-{}^4/_3, 1)$ и радиус равен $\sqrt{{}^{85}/_9} = {}^1/_3\sqrt{85}$.

104. Показать (таким же приемом, какой указан в решении предыдущей задачи), что вообще уравнение вида:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0,$$

у которого коэффициенты при x^2 и y^2 одинаковы и нет члена с xy, выражает окружность; найти ее радиус и положение центра.

Найти радиус и положение центра окружностей, выражаемых уравнениями:

105. $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 24 = 0$
106. $x^2 + y^2 = 2y + 35$
107. $y = -7 \pm \sqrt{16 - x^2 - 6x}$
108. $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 3 = 0$
109. $y = {}^3/_2 \pm {}^1/_2 \sqrt{20x - 4x^2 + 11}$
110. $5x^2 + 5y^2 - 9y - 38 = 0$

111. Вычислить (с точностью до 0,001) координаты точек, в которых прямая линия $y = 2x - 3$ пересекается с окружностью $x^2 + y^2 = 10$.

Уравнение эллипса.

(§§ 357—361.)

Показать, что следующие уравнения приводятся к виду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, т. е. все они выражают эллипс, которого центр совпадает с началом координат и большая ось лежит на оси x-ов (перед радикалами надо подразумевать оба знака $\pm$):

112.	$x^2 + 4y^2 = 100$	$3x^2 + 16y^2 = 192$
113.	$25x^2 + 81y^2 = 2025$	$4x^2 + 9y^2 = 144$
114.	$\frac{5x^2}{9} + y^2 = 5$	$\frac{25}{9}y^2 = 25 - x^2$
115.	$y = \frac{1}{2}\sqrt{36 - x^2}$	$y = \frac{2}{5}\sqrt{100 - x^2}$
116.	$y = \frac{3}{8}\sqrt{64 - x^2}$	$y = \frac{1}{2}\sqrt{20 - x^2}$

Найти положение центра и величину и положение осей эллипсов, выражаемых следующими уравнениями:

117. $\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$ 118. $\frac{(x+4)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

119. $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 120. $\frac{x^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

121. $\frac{x^2}{4}+(y-5)^2=1$ 122. $(x-2)^2+4(y-3)^2=1$

Показать, что следующие уравнения приводятся к виду:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1,$$

т. е. что они выражают эллипс, центр которого лежит в точке (m,n) и большая ось параллельна оси x-ов:

123. $y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{10x-x^2}$ 124. $y=1\pm\frac{1}{4}\sqrt{108-9x^2-36x}$

125. На эллипсе, заданном уравнением

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,$$

взята точка, которая при положительной абсциссе имеет ординату 1. Составить уравнение касательной, проходящей через эту точку. Найти координаты точек пересечения этой касательной с осями координат.

126. То же, если точка взята на эллипсе: $y=\pm{}^3/_5\sqrt{25-x^2}$ и при положительной ординате имеет абсциссу 3.

Уравнение гиперболы.

(§§ 363—368.)

Показать, что следующие уравнения приводятся к виду $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, т. е. что они выражают гиперболы, которых оси расположены на осях координат; вещественная ось на оси x-ов, мнимая на оси y-ов; написать уравнения асимптот (перед знаками радикалов подразумеваются оба знака $\pm$):

127. $9x^2-4y^2=36$ 128. $y={}^3/_4\sqrt{x^2-16}$

129. $y={}^5/_3\sqrt{x^2-9}$ 130. $y={}^1/_2\sqrt{x^2-64}$

131. $y=\sqrt{x^2-16}$ 132. $y={}^2/_3\sqrt{x^2-81}$

Каковы будут величины осей у гипербол:

133. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ 134. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$

135. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{18}=1$ 136. $x^2-y^2=36$

Определить положение центра и осей гипербол, данных уравнениями:

137. $\frac{(x-5)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$ 138. $\frac{(x+2)^2}{25}-\frac{(y-6)^2}{64}=1$

Показать, что следующие уравнения приводятся к виду:

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1,$$

т. е. что они выражают гиперболу, центр которой лежит в точке (m,n) и оси параллельны координатным осям, вещественная ось параллельна оси x-ов, мнимая ось параллельна оси y-ов:

139. $y=1\pm{}^2/_3\sqrt{x^2-6x}$ 140. $y=-3\pm{}^2/_5\sqrt{x^2+10x}$

141. На гиперболе: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ взята точка, которая при положительной абциссе имеет ординату 1. Составить уравнение касательной, проведенной через эту точку, и найти точки пересечения ее с осями координат.

142. То же для гиперболы: $y=\pm{}^2/_3\sqrt{x^2-49}$, если взятая на ней точка при положительной ординате имеет абсциссу, равную 8.

Уравнение параболы.

(§§ 370—375.)

Определить положение вершины, оси и директрисы парабол, заданных следующими уравнениями:

143. $y^2=10x$ 144. $y^2=6x$ 145. $y^2=9x$

146. $y=\pm\sqrt{3x}$ 147. $y=\pm\sqrt{7x}$ 148. $y=\pm\sqrt{12x}$

(В этих шести случаях ось параболы лежит на оси x-ов и направлена в положительном ее направлении.)

149. $y^2=-9x$ 150. $y^2=-10x$ 151. $y^2=-x$

(В трех последних примерах ось направлена в отрицательном направлении оси x-ов.)

152. $y^2 = 8x - 16$ 153. $y^2 = 5x + 15$ 154. $y = \pm\sqrt{2x+8}$

(В последних трех примерах координаты вершины будут: (2,0), (— 3,0) и (— 4,0); ось идет по положительному направлению оси x ов.)

155. $(y+2)^2 = 4x$; $y = 1 \pm \sqrt{16x}$ $(y-4)^2 = 12x$

(Координаты вершины параболы: (0, — 2), (0,1) и (0,4).

156. $2y^2 + 2y - 11x + 73 = 0$

Решение. Уравнение можно преобразовать так:

$$y^2 + y = {}^{11}/_2 x - {}^{73}/_2;\ (y + {}^1/_2)^2 = {}^{11}/_2 x - {}^{73}/_2 + {}^1/_4$$
$$(y + {}^1/_2)^2 = {}^{11}/_2 x - {}^{145}/_4;\ (y + {}^1/_2)^2 = {}^{11}/_2 (x - {}^{290}/_{44})$$

Отсюда видно, что вершина лежит в точке $({}^{290}/_{44}, -{}^1/_2)$, ось параллельна оси x-ов и направлена в положительную сторону; параметр равен ${}^{11}/_4 = 2{}^3/_4$.

157. $y^2 + 6y - 9x = 0$ 158. $y = {}^1/_2 x^2$

159. $15y = x^2$ 160. $-8y = x^2$

Как мы видели в § 212 (ч. I), кривая, выраженная уравнением вида $y = ax^2 + c$, есть парабола $y = ax^2$, только перемещенная параллельным перенесением на c единиц вверх, если $c > 0$, и вниз, если $c < 0$. Ось параболы направлена по положительному направлению оси y-ов, если $a > 0$, и по отрицательному, если $a < 0$. Руководствуясь этим, определить положение вершины, оси и директрисы в следующих примерах:

161. $y = 2x^2 - 8$ $y = 3x^2 + 6$ $y = 5x^2 - 10$

162. $y = 3x^2 - 12$ $y = x^2 - 25$ $y = 4x^2 + 16$

163. $y = -3x^2 + 12$ $y = -4x + 8$ $y = -2x^2 - 10$

Приняв во внимание §§ 224 (часть I) и 335, определить координаты вершины параболы и направление ее оси, а также решить вопрос о возрастании или убывании функции и о ее нулевых значениях (т. е. точках, в которых парабола пересекается с осью x-ов):

164. $y = x^2 + 5x + 4$ 165. $y = x^2 + {}^{11}/_6 x - {}^5/_3$

166. $y = {}^8/_3 - {}^2/_3 x - x^2$ 167. $y = 2 + 4x - x^2$

168. $y = x^2 + {}^3/_2 x - {}^9/_2$ 169. $y = -x^2 + 4x - 5$

170. $y = 5 - 2x - x^2$ 171. $y = -x^2 + 6x - 9$

172. На параболе $y = {}^3/_4 x^2$ взята точка с абсциссой 2. Составить уравнение касательной, проведенной через эту точку.

173. То же для точки с абсциссой — 2.

174. На параболе $y = -\frac{1}{3}x^2$ взяты две точки, у которых одна и та же ордината, именно — 12; составить уравнения касательных, проведенных через эти точки.

Первообразная функция.

(§ 378.)

Найти первообразные функции по следующим производным:

175.	$y' = a$	$y' = -5$	$y' = \frac{1}{5}$	$y' = 2{,}3$
176.	$y' = x$	$y' = 3x$	$y' = \frac{1}{3}x$	$y' = 0{,}7x$
177.	$y' = x + 2$		$y' = x - 7$	$y' = 2x + \frac{1}{2}$
178.	$y' = 5x - 2$		$y' = 2a \pm b$	$y' = mx \pm p$
179.	$y' = 5x^2$		$y' = -2x^2$	$y' = nx^2 + m$
180.	$y' = 3x^2 + 7x$		$y' = 12x^2 - 4x$	$y' = 21x^2 + 8x - 2$
181.	$y' = x^3$		$y' = 4x^3 - 7x$	$y' = ax^2 + bx + c$
182.	$y' = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 7$		$y' = -\frac{1}{x^2}$	
183.	$y' = -\frac{2}{t^2}$		$y' = \frac{1}{x^2}$	$y' = \frac{a}{t^2} + b$
184.	$y' = x^2\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}\right)$			$y' = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$

(в последних двух примерах надо предварительно раскрыть скобки).

Нахождение площади.

(§ 377.)

185. Найти площадь, ограниченную прямой $y = 2x + 1$, осью x-ов и двумя ординатами, соответствующими абсциссам $x = 4$ и $x = 25$. Проверить полученное число посредством формулы элементарной геометрии для площади трапеции.

186. То же между $x = 1$ и $x = 10$; между $x = -1$ и $x = 15$.

187. Определить площадь, ограниченную параболой $y = 2x^2 + 3$, осью x-ов и 2 ординатами при $x = 3$ и $x = 9$.

188. То же между $x = 0$ и $x = 8$; между $x = 1$ и $x = 10$.

189. Определить площадь, ограниченную параболой $y = 3 + 4x + 3x^2$, осью x-ов и ординатами, соответствующим абсциссам $x = 1$ и $x = 2$.

190. Найти площадь, заключенную между осью x-ов и дугою параболы $y = 7x - x^2 - 10$, ограниченную точками пересечения этой кривой с осью x-ов.

191. Дана кривая $y=\frac{10}{x^2}$. Найти площадь, ограниченную этой кривою, осью x-ов и ординатами при $x=2$ и $x=8$.

192. Определить площадь, ограниченную кривою, выраженною уравнением $x^2y=x^3+a^3$, осью x-ов и ординатами при $x=a$ и $x=2a$.

193. Найти точку пересечения кривой $y=x-\frac{1}{x^2}$ с осью x-ов и затем определить площадь, ограниченную этой кривой и осью x-ов от точки пересечения до ординаты при $x=2$.

По данному закону скорости найти закон пространства.

(§ 379.)

Найти закон пространства, если:

194. $v=2+3t$ и $e=3$, если $t=0$

195. $v=t^2+4t-5$ и $e=4$, если $t=1$

196. $v=2-\frac{1}{t^2}$ и $e=3$, если $t=1$

197. $v=t^2+\frac{1}{t^2}$ и $e=4$, если $t=2$

198. $v=(t-1)(t-3)$ и $e=5$, если $t=0$

199. $v=\frac{t^2-1}{t^2}$ и $e=6$, если $t=1$

200. Поезд движется между двумя последовательными остановками со скоростью $v={}^1/_2t(2-t)$, если скорость измерять километрами в минуту и время выражать в минутах, начиная от первой остановки; показать, что

1) все расстояние между остановками поезд проходит в 2 минуты;

2) *maximum* скорости будет $^1/_2$ *км* в минуту;

и 3) расстояние между остановками равно $^2/_3$ *км*.

По данному закону ускорения найти закон скорости.

(§ 380.)

201. Камень брошен вертикально вниз со скоростью 30*м* в секунду; ускорение от действия силы тяжести равно 9,8*м* в секунду; найти скорость тела по прошествии t секунд от начала падения и пространство, которое камень пройдет в t секунд.

202. Тело движется по прямой линии с ускорением $w = 3t^2 + t - 2$. Найти *maximum* и *minimum* скорости, если известно, что когда $t = 1$, тогда $v = 10$.

203. Тело движется по прямой линии с ускорением $w = 2 + 6t$. Определить закон скорости, если известно, что $v = -2$, если $t = 0$.

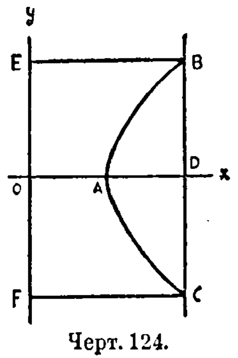
Нахождение объема.

(§§ 381—383.)

204. Парабола $y^2 = 4ax$, которой ось расположена на оси x-ов (в положительном ее направлении), вращаясь вокруг этой оси, производит так называемый параболоид вращения. Найти объем, ограниченный поверхностью этого параболоида и плоскостью, перпендикулярною к оси x-ов в точке ее $x = b$. Показать, что этот объем равен $^1/_2$ объема цилиндра, описанного около параболоида.

205. Взята часть гиперболы $y = \frac{1}{x}$, лежащей в угле xOy, и из концов ее проведены перпендикуляры на ось x-ов; один из этих перпендикуляров оказался на расстоянии a от оси y-ов, другой на расстоянии $b > a$. Найти объем тела, происходящего от вращения вокруг оси x-ов фигуры, ограниченной этой осью, двумя указанными перпендикулярами и дугою гиперболы. Показать затем, что если $b \to \infty$, то этот объем приближается к конечному пределу.

206. Уравнение $y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$ выражает эллипс, которого центр совпадает с началом координат и большая ось расположена на оси x-ов. Найти объем эллипсоида, получаемого вращением этого эллипса вокруг большой оси (предварительно надо найти оси эллипса).



Черт. 124.

207. Найти объем тела, производимого вращением вокруг оси x-ов кривой $y^2 = x\,(a - x)$.

208. Чертеж 124-й изображает равностороннюю гиперболу $x^2 - y^2 = a^2$, пересеченную хордою BC, параллельною оси y-ов и отстоящею от нее на расстоянии $OD = 2a$. Показать, что объем тела, получаемого вращением вокруг оси x-ов части ABD, равен объему шара радиуса a.

209. Показать также, что объем тела, получаемого вращением вокруг оси y-ов фигуры $EBACF$ (черт. 124), равен половине объема цилиндра, получаемого вращением прямоугольника $EBCF$.

Делимость на $x - a$.

(§§ 391—395.)

210. Найти остаток от деления многочлена $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 20x - 8$ на $x - 1$; на $x + 1$; на $x - 2$; на $x + 2$; на $x - 3$; на $x + 3$.

211. Определить численную величину a в многочлене: $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + 11$, чтобы он делился без остатка на $x + 1$.

212. Как можно быстро решить кубичное уравнение, если один его корень известен? Например, решить уравнение $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, которого один корень есть 1.

213. Ученик запомнил, что делимость или неделимость двучленов $x^m - a^m$ и $x^m + a^m$ на двучлены $x - a$ и $x + a$ зависит от того, будет ли показатель m четное число или нечетное; но он забыл, когда делимость происходит при четном показателе и когда при нечетном. Как можно легко восстановить в памяти все эти 4 случая делимости?

Сложные радикалы.

(§ 403.)

Преобразовать следующие сложные радикалы в сумму или разность двух простых радикалов:

214. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 215. $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ 216. $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$

217. $\sqrt{5\pm\sqrt{24}}$ 218. $\sqrt{158+60\sqrt{6}}$ 219. $\sqrt{11+\sqrt{105}}$

220. $\sqrt{27-7\sqrt{5}}$ 221. $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{5-\sqrt{21}}$

222. $\sqrt{7+2\sqrt{6}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ 223. $\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}$

224. $\sqrt{a^2+x^2+\sqrt{a^4+a^2x^2+x^4}}$

225. Пусть a_n означает длину стороны правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса R. Тогда, как известно из геометрии:

$$a_{2n}\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}}.$$

Преобразовать эту формулу в разность двух простых радикалов.

226. Найти необходимое и достаточное условие, чтобы корни уравнения $ax^4 + bx^2 + c = 0$ могли быть выражены в виде суммы или разности двух простых радикалов.

Дополнительные сведения о неравенствах.

(§§ 404 — 409.)

227. Показать, что при всяком вещественном значении x имеет место следующее неравенство:

$$\frac{1}{2} \geqslant \frac{x+1}{x^2+3} \geqslant -\frac{1}{6}.$$

228. Доказать, что если a и b два положительные числа и $a > b$, то $\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a-b}$.

229. Доказать, что если $n \geqslant 0$, то

$$\frac{n}{(n+1)(n+3)} < \frac{n+1}{(n+1)(n+4)}.$$

230. Доказать, что если x и y два положительных неравных числа, то

$$4\ (x^3+y^3) > (x+y)^3.$$

231. Умножение обеих частей неравенства

$$F_1(x) > F_2(x)$$

на $f\ (x)$ приводит ли всегда к равносильному неравенству?

Если, например, обе части неравенства: $2x-3 > x+7$ умножим на $2-x$, то получим ли равносильное неравенство?

Комплексные числа.

(§§ 410 — 415.)

232. Проверить равенство:

$$i^7+i^{18}+i^{25}+i^{35}+i^{97}+i^{100}=0.$$

Вычислить выражения:

233. $(x+i\sqrt{6})(x-i\sqrt{6})$ 234. $\sqrt{1+i}\sqrt{1-i}$

235. $\sqrt{4+2\sqrt{-6}} \times \sqrt{4-2\sqrt{-6}}$ 236. $(3\sqrt{-2}+2\sqrt{-3})^2$

237. $(1+i)^4$; $(-2\sqrt{-2})^6$

Проверить возвышением в квадрат или в куб следующие равенства:

238. $\sqrt{2i}+\sqrt{-2i}=2$

239. $\sqrt[3]{i}=-i$ 240. $\sqrt{i}=\pm {}^1/_2\sqrt{2}(1+i)$

241. $\sqrt{-i}=\pm {}^1/_2\sqrt{2}(1-i)$ 242. $\sqrt[3]{+}$ [redacted] -1

243. $\sqrt{1+\sqrt{-2}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$

Выполнить указанные действия:

244. $(\sqrt{9+40i}+\sqrt{9-40i})^2$ 245. $(\sqrt[3]{1+i}+\sqrt[3]{1-i})^3$

246. $\frac{(a+ib)^2}{a-ib}-\frac{(a-ib)^2}{a+ib}$ 247. $\frac{\sqrt{-(1+i)}-i}{\sqrt{-(1-i)}+i}\,\frac{\sqrt{-(1-i)}}{\sqrt{-(1+i)}}$

248. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы произведение $(a+bi)(c+di)$ было: 1) число вещественное; 2) число мнимое.

249. То же для частного $(a+bi):(c+di)$.

250. Все ли действия над комплексными числами, выраженными под видом $a+bi$, выполнимы?

Упростить выражения:

251. $\frac{1}{-1+i\sqrt{3}}$ 252. $\frac{1}{-1-i\sqrt{3}}$

253. $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$ 254. $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$

255. Обозначив для краткости:

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\alpha_1;\quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\alpha_2 \text{ и } 1=\alpha_3,$$

проверить равенства:

1) $\alpha_1^3=\alpha_2^3=\alpha_3^3=1$;
2) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$;
3) $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=1$;
4) $\alpha_1^2=\alpha_2$;
5) $\alpha_2^2=\alpha_1$;
6) $1+\alpha_1+\alpha_1^2=0$.

256. Доказать при помощи комплексных чисел, что всякое число, равное какой-нибудь степени суммы двух квадратов, есть само сумма двух квадратов.

Решение:

$$(a^2+b^2)^m=[(a+bi)(a-bi)]^m=(a+bi)^m(a-bi)^m.$$

Но если выполним, согласно биному Ньютона возвышение в степень, то найдем, что $(a+bi)^m=A+Bi$ и $(a-bi)^m=A-Bi$; следовательно, $(a^2+b^2)^m=(A+Bi)(A-Bi)=A^2+B^2$.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

ОТДЕЛ ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ.

УЧЕНИЕ О ПРЕДЕЛАХ.

ОТДЕЛ ПЯТНАДЦАТЫЙ.

ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ.

ОТДЕЛ ШЕСТНАДЦАТЫЙ.

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.

ОТДЕЛ СЕМНАДЦАТЫЙ.

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА—ЛЕНИНГРАД

РУКОВОДСТВА И ПОСОБИЯ
ДЛЯ
ПРЕПОДАВАТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Валецкий, Г. Вопросы элементарной математики. Стр. 156. Ц. 1 р. 60 к.

Вопросы математики и ее преподавания. Сборник статей под ред. И. И. Чистякова и Н. М. Соловьева. Стр. 103. Ц. 80 к.

Математика в школе. Сборник IV, посвященный вопросам преподавания математики в трудовой школе II ступени. Под ред. И. И. Грацианского. Стр. 176. Ц. 1 р. 75 к.

Сборник I (V), посвященный вопросам преподавания математики в трудовой школе I ступени. Стр. 128. Ц. 1 р. 50 к.

Сборник II (VI), посвященный вопросам преподавания математики в трудовой школе II ступени. Стр. 120. Ц. 1 р. 50 к.

Перельман, Я. И. Практические занятия по геометрии Стр. 136. Ц. 60 к.

Пиотровский, Б. Б. Тригонометрия. Стр. 304. Ц. 2 р. 75 к.

Сигов, И. А. Проекционное черчение в курсе геометрии единой трудовой школы I и II ступени. Стр. 70. Ц. 65 к.

Юнг, В. А., проф. Как преподавать математику в школе I и II ступени. Стр. 296. Ц. 1 р. 50 к.

ПРОДАЖА ВО ВСЕХ МАГАЗИНАХ И ОТДЕЛЕНИЯХ ГОСИЗДАТА